

## چهار روش برآورد پارامترهای یک مدل آمیخته‌ی گاوسی

دنیا رحمانی و عادل محمدپور\*

دانشگاه صنعتی امیرکبیر (پلی‌تکنیک تهران)

**چکیده:** مدل آمیخته‌ی گاوسی پرکاربردترین مدل آمیخته‌ی متناهی است. خاصیت مهم این مدل انعطاف‌پذیری آن نسبت به توزیع‌های پیوسته با اشکال گوناگون است. از آنجا که مهم‌ترین بخش برآزش یک مدل، برآورد پارامترهای آن می‌باشد، در این جا برآنیم تا پارامترهای مدل آمیخته‌ی گاوسی دومیولفه‌ای را از طریق چهار روش برآورد کنیم. ابتدا مدل آمیخته‌ی گاوسی را در حالت دومیولفه‌ای بیان می‌کنیم، سپس پارامترهای مدل را از دو روش گشتاوری و ماکسیمم درست‌نمایی با عنوان حل تحلیلی و عددی برآورد می‌کنیم. در ادامه برآورد پارامترها را با استفاده از الگوریتم EM به دست آورده و در انتها نیز از الگوریتم نمونه‌گیر گیبز برای یافتن برآوردها استفاده کرده‌ایم. در بخش نتیجه‌گیری، نتایج به دست آمده از روش‌ها را با یکدیگر مقایسه می‌کنیم. سعی ما بر این است که یک مسئله‌ی برآورد را با چهار روش مرسوم حل کرده و برتری‌ها و محدودیت‌های هر یک را برای کاربران مشخص کنیم.

واژگان کلیدی: حل تحلیلی و عددی؛ الگوریتم EM؛ نمونه‌گیر گیبز؛ مدل آمیخته‌ی گاوسی.

### ۱- مقدمه

مدل آمیخته‌ی متناهی اولین بار در قرن نوزدهم وارد ادبیات آمار شد [۹]. از جمله مدل‌های آمیخته‌ی متناهی می‌توان به مدل آمیخته‌ی پواسن برای گروه‌بندی اسناد در امر بازیابی اطلاعات و مدل آمیخته‌ی فیشر برای تحلیل متون و آزمایش‌های ژنی اشاره کرد. مشهورترین مدل آمیخته، مدل آمیخته‌ی گاوسی می‌باشد [۴] و [۱۳]. مدل‌های آمیخته‌ی

\* نویسنده‌ی عهده‌دار مکاتبات

دریافت: ۱۳۹۰/۸/۹، پذیرش: ۱۳۹۳/۹/۳.

متناهی در خوشه‌بندی، برآورد تابع چگالی، تحلیل مؤلفه‌ای، تحلیل تصاویر و دیگر موارد کاربرد بسزایی دارد. یک مدل آمیخته‌ی متناهی به صورت زیر تعریف می‌شود:

فرض کنید  $x_1, \dots, x_n$  مشاهداتی از نمونه‌ی تصادفی مستقل و هم‌توزیع  $X_1, \dots, X_n$  با بردار پارامتر  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_K)$  باشند، آنگاه تابع چگالی آمیخته‌ی مشاهدات به صورت زیر خواهد بود:

$$(۱) \quad f(x_i; \theta) = \sum_{k=1}^K \alpha_k f_k(x_i; \theta_k), \quad i = 1, \dots, n$$

$f(x_i; \theta)$  را تابع چگالی آمیخته‌ی  $K$  مؤلفه‌ای نیز گویند. منظور از مؤلفه همان زیرجامعه‌های تشکیل‌دهنده‌ی جامعه می‌باشد که تعدادشان را با  $K$  نشان می‌دهند.  $\theta_k$  پارامتر مربوط به زیر جامعه‌ی  $k$  می‌باشد و  $\alpha_k$  ضریب وزنی یا ضریب آمیخته‌ی مؤلفه‌ی  $k$  است که در شرایط زیر صدق می‌کند:

$$\sum_{k=1}^K \alpha_k = 1 \quad 0 \leq \alpha_k \leq 1.$$

$f_k(x_i; \theta_k)$  چگالی مؤلفه‌ی  $k$  ام با پارامتر  $\theta_k$  می‌باشد [۸].

## ۲- مدل آمیخته‌ی گاوسی

مدل آمیخته‌ی گاوسی برای مشاهدات مستقل و هم‌توزیع  $x_1, \dots, x_n$  مجموع وزن‌دار  $K$  مؤلفه، با تابع چگالی گاوسی است، که با معادله‌ی زیر نشان داده می‌شود:

$$f(x_i; \mu, \sigma^2) = \sum_{k=1}^K \alpha_k \phi(x_i; \mu_k, \sigma_k^2)$$

در این جا  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_K)$  و  $\sigma^2 = (\sigma_1^2, \dots, \sigma_K^2)$  بردار پارامترهای مدل

آمیخته‌ی (۱) می‌باشند.  $\phi(x_i; \mu_k, \sigma_k^2)$  تابع چگالی گاوسی با پارامترهای  $\mu_k$  و  $\sigma_k^2$  مربوط به مؤلفه‌ی  $k$  ام می‌باشد که از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\phi(x_i; \mu_k, \sigma_k^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_k^2}} \exp\left[-\frac{(x_i - \mu_k)^2}{2\sigma_k^2}\right].$$

مثال ۱: برای مشاهدات  $x_1, \dots, x_n$ ، که ترکیبی از دو زیرجامعه‌ی گاوسی به ترتیب با میانگین‌های  $\mu_1, \mu_2$  و واریانس‌های  $\sigma_1^2, \sigma_2^2$  باشند، آنگاه تابع چگالی آمیخته‌ی آن‌ها با ضرایب وزنی  $\alpha_1 = \alpha$  و  $\alpha_2 = 1 - \alpha$  به صورت زیر خواهد بود:

$$\sum_{k=1}^2 \alpha_k \phi(x_i; \mu_k, \sigma_k^2) = \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} \exp\left[-\frac{(x_i - \mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right] + \frac{1-\alpha}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}} \exp\left[-\frac{(x_i - \mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right]$$

می‌توان مشاهداتی از مدل آمیخته‌ی گاوسی دو مؤلفه‌ای را بر اساس دستور ارائه شده در بخش پیوست در نرم‌افزار R تولید کرد. مقادیر در نظر گرفته شده برای پارامترها بسته به نظر کاربر انتخاب می‌شود.

همان‌طور که می‌دانیم مهم‌ترین مسئله در ارتباط با یک مدل، براورد پارامترهای آن می‌باشد. از این رو در بخش ۳ این مقاله پارامترهای مدل آمیخته‌ی گاوسی دو مؤلفه‌ای را از دو روش گشتاوری و ماکسیمم درستنمایی به عنوان روشی تحلیلی بیان کرده، سپس از روش عددی استفاده می‌کنیم. در ادامه نیز از الگوریتم EM و الگوریتم نمونه‌گیر گیبز برای یافتن براورد پارامترها استفاده کرده‌ایم.

### ۳- براورد پارامترهای مدل آمیخته‌ی گاوسی به روش تحلیلی

در این بخش ابتدا روش گشتاوری و سپس روش ماکسیمم درستنمایی، را برای براورد پارامترهای مدل آمیخته‌ی گاوسی به کار می‌بریم. در ادامه براورد ماکسیمم درستنمایی به روش عددی و الگوریتم EM را محاسبه کرده و با براورد بیز که از الگوریتم گیبز به دست آمده، مقایسه می‌کنیم.

## ۱-۳- روش گشتاوری

پی‌یرسون در سال ۱۸۹۴ برای برازش مدل به داده‌هایی که نسبت طول پیشانی به طول بدن ۱۰۰۰ خرچنگ را بیان می‌داشتند و توسط ولدن در سال ۱۸۹۲ جمع‌آوری شده بودند، از مدل آمیخته‌ی گاوسی تک‌متغیره استفاده کرد، [۹]. او داده‌ها را به ۲۹ بازه با فراوانی  $y_i$  برای  $i = 1, \dots, 29$ ، تقسیم‌بندی کرد و برای مدل‌بندی آن‌ها دو تابع چگالی نرمال با میانگین‌های  $\mu_1$  و  $\mu_2$  و واریانس‌های  $\sigma_1^2$  و  $\sigma_2^2$  را با ضرایب وزنی  $\alpha$  و  $1 - \alpha$  با یکدیگر آمیخت. او برای برآورد پارامترهای مدل از روش گشتاوری استفاده کرد. پی‌یرسون، در ابتدا گشتاورهای مرکزی مرتبه‌ی اول تا پنجم مشاهدات  $\tilde{\mu}_i, i = 1, \dots, 5$  را به دست آورد. سپس با استفاده از روش گشتاوری به ۵ معادله برای برآورد ۵ پارامتر مجهول رسید. با حل دستگاه معادلات به معادله‌ی درجه‌ی ۹ زیر دست یافت:

$$\begin{aligned} & 24p_1^9 - 28\lambda_1 p_1^8 + 36\tilde{\mu}_1^2 p_1^7 - (24\tilde{\mu}_1 \lambda_1 - 10\lambda_1^2) p_1^6 \\ & - (148\tilde{\mu}_1^2 \lambda_1 + 2\lambda_1^3) p_1^5 + (288\tilde{\mu}_1^4 - 12\lambda_1 \lambda_1 \tilde{\mu}_1 - \lambda_1^3) p_1^4 \\ & + (24\tilde{\mu}_1^3 \lambda_1 - 7\tilde{\mu}_1^2 \lambda_1^2) p_1^3 + 32\tilde{\mu}_1^4 \lambda_1 p_1 - 24\tilde{\mu}_1^6 = 0 \end{aligned}$$

به طوری‌که

$$\begin{aligned} (2) \quad & p_1 = \mu_1 + \mu_2, \quad p_2 = \mu_1 \mu_2 \\ & \lambda_1 = 9\tilde{\mu}_1^2 - 3\tilde{\mu}_1^3, \\ & \lambda_2 = 30\tilde{\mu}_1 \tilde{\mu}_2 - 3\tilde{\mu}_2^2. \end{aligned}$$

پی‌یرسون با حل معادله‌ی درجه‌ی ۹ بالا مقدار  $p_2$  را به دست آورد. بعد از به دست آوردن مقدار  $p_2$  مقدار متناظر با آن، یعنی  $p_1$ ، از رابطه‌ی زیر حاصل شد:

$$p_1 = \frac{2\tilde{\mu}_1^3 - 2\tilde{\mu}_1 \lambda_1 p_2 - \lambda_2 p_2^2 - 8\tilde{\mu}_1 p_2^3}{p_2 (4\tilde{\mu}_1^2 - \lambda_1 p_2 + 2p_2^2)}$$

سپس با توجه به رابطه‌ی (۲)  $\mu_1$  و  $\mu_2$  را معادل ریشه‌های معادله‌ی (۳) در نظر گرفت:

$$(3) \quad \mu^2 - p_1\mu + p_2 = 0$$

و همچنین  $\alpha$  و  $1 - \alpha$  را معادل ریشه‌های معادله‌ی (۴) قرار داد:

$$(4) \quad \alpha^2 - \alpha - \frac{p_2}{p_1^2 - 4p_2} = 0$$

در انتها نیز،  $\sigma_1^2$  و  $\sigma_2^2$  از رابطه‌های زیر به دست می‌آیند:

$$(\mu_1 \sigma_1)^2 = \frac{\tilde{\mu}}{\mu_1} - \frac{1}{3} \cdot \frac{\tilde{\mu}_2}{\mu_1 \mu_2} - \frac{1}{3} (\mu_1 + \mu_2) + \mu_2$$

$$(\mu_2 \sigma_2)^2 = \frac{\tilde{\mu}}{\mu_2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{\tilde{\mu}_2}{\mu_1 \mu_2} - \frac{1}{3} (\mu_1 + \mu_2) + \mu_1$$

بعد از حل معادله‌ی درجه‌ی ۹، دو مدل برای داده‌ها به دست می‌آید. پی‌یرسون با رسم نمودارهای دو مدل، مشاهده کرد که هر دو مدل برای داده‌ها مناسب است. به‌عنوان معیاری برای مقایسه‌ی دو مدل، گشتاور مرتبه‌ی ششم دو مدل را به دست آورد و نتیجه گرفت که مدل ۱ نسبت به مدل ۲ بهتر است، زیرا گشتاور مرتبه‌ی ششم کم‌تری دارد. همان‌طور که مشاهده می‌شود روشی که پی‌یرسون برای براورد گشتاورهای پارامترهای مدل در نظر گرفته است، برای داده‌های چندمتغیره، نیاز به محاسبات زیادی دارد که در عمل کاربرد چندانی نخواهد داشت. بدین منظور از روش ماکسیمم درست‌نمایی برای براورد پارامترهای مدل استفاده می‌شود. براوردگر ماکسیمم درست‌نمایی تحت برقراری شرایط نظم، کاراتر از براوردگر گشتاوری است. قابل ذکر است که معادلات بالا را می‌توان با استفاده از نرم‌افزارهای محاسبات جبری نظیر ممتیکا (Mathematica) حل کرد و نتیجه‌ی مشابه پی‌یرسون گرفت.

## ۲-۳- روش ماکسیمم درست‌نمایی

روشی متداول در آمار برای براورد پارامتر، روش ماکسیمم درست‌نمایی است. در این روش

پارامترها به گونه‌ای برآورد می‌شوند که تابع درستنمایی مدل آمیخته‌ی گاوسی را ماکسیمم کند. تابع درستنمایی برای مشاهدات یک نمونه‌ی تصادفی  $x_1, \dots, x_n$  با تابع چگالی (یا تابع جرم احتمال)  $f(x_i; \theta)$  با بردار پارامتر  $\theta$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$L(\theta | x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta)$$

در بیش‌تر موارد برای سهولت کار  $\ln L(\theta | x_1, \dots, x_n)$  را ماکسیمم می‌کنند. تابع درستنمایی توزیع آمیخته‌ی گاوسی تک‌متغیره (مثال ۱) تحت تبدیل لگاریتمی به صورت زیر است:

$$l(\theta) = \ln L(\alpha, \mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2 | x_1, \dots, x_n) \\ (5) \quad = \sum_{i=1}^n \ln \left[ \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} \exp \left\{ -\frac{(x_i - \mu_1)^2}{2\sigma_1^2} \right\} + \frac{(1-\alpha)}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}} \exp \left\{ -\frac{(x_i - \mu_2)^2}{2\sigma_2^2} \right\} \right]$$

برای به دست آوردن برآوردگر ماکسیمم درستنمایی از معادله‌ی (۵)، نسبت به  $\theta = (\alpha, \mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2)$  مشتق گرفته برابر با صفر قرار داده و ۵ معادله به دست می‌آوریم. معادلات به دست آمده توابعی غیر خطی از پارامترها می‌باشند و ماکسیمم کردن آن‌ها به روش مستقیم امکان‌پذیر نمی‌باشد. همچنین برای برآورد پارامترها، فرم تحلیلی وجود ندارد. از این رو این برآوردها نیز همیشه رفتار خوبی ندارند [۳].

### ۱-۲-۳- برآورد پارامترهای مدل آمیخته‌ی گاوسی به روش عددی

از آن‌جا که برای دستیابی به برآورد ماکسیمم درستنمایی محاسبات زیادی مورد احتیاج است، می‌توان از روش‌های عددی، مقداری تقریبی برای برآورد پارامترهای مدل را محاسبه کرد. دستور optim در نرم‌افزار R، با مینیمم کردن قرینه‌ی تابع درستنمایی، به روش عددی Nelder-Mead پارامترهای مدل را برآورد می‌کند. می‌توان برای برآورد پارامترهای مدل به روش عددی از دستور بخش پیوست استفاده کرد.

با توجه به این‌که روش‌های عددی نسبت به مقدار اولیه حساس هستند، از این رو نمی‌توان جواب‌های قابل قبولی از آن‌ها انتظار داشت. برای رفع این حساسیت، روش‌های استوارتری نسبت به روش‌های عددی ارائه شده که در بخش‌های بعد به معرفی آن‌ها می‌پردازیم.

### ۲-۲-۳- براورد پارامترهای مدل آمیخته‌ی گاوسی با الگوریتم EM

دمپستر و همکارانش در سال ۱۹۷۷ الگوریتم EM را ارائه دادند. این الگوریتم روشی برای محاسبه‌ی براوردگر ماکسیمم درستنمایی است، هنگامی که داده‌ی گمشده وجود داشته باشد یا روش‌های ساده‌ی بهینه‌سازی با شکست مواجه شوند [۲]. از مهم‌ترین کاربردهای الگوریتم EM یافتن براورد پارامترهای مدل آمیخته متناهی می‌باشد. برای یافتن پارامترهای مدل آمیخته گاوسی در این روش علاوه بر مجموعه‌ی مشاهدات، از متغیر تصادفی برنولی  $Z_i$  با احتمال

$$\alpha = P(Z_i = 1)$$

$$1 - \alpha = P(Z_i = 0)$$

استفاده می‌شود. به  $Z_i$  متغیر پنهان یا برچسب گفته می‌شود. به عبارت ساده‌تر با متناظر کردن یک برچسب به مشاهده‌ی  $x_i$ ، می‌توان نشان داد که این مشاهده به کدام زیرجامعه تعلق دارد.

الگوریتم EM با در نظر گرفتن متغیرهای پنهان از چرخه‌ی مکرر برای براورد پارامترها استفاده می‌کند. این الگوریتم با در نظر گرفتن مقدار اولیه برای پارامترهای مدل شروع می‌شود، که به این مرحله، مرحله‌ی آغازین گویند. در گام بعد که مرحله‌ی تکرار نامیده می‌شود، این پارامترها به روز می‌شود و چرخه تا جایی تکرار می‌شود که الگوریتم همگرا شود. مرحله‌ی تکرار از دو گام محاسبه‌ی امید ریاضی و ماکسیمم‌سازی تشکیل می‌شود. در گام اول به جای محاسبه‌ی مستقیم لگاریتم تابع درستنمایی، امید ریاضی آن بر حسب بردار متغیرهای پنهان  $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_n)$  به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$E_{f(\mathbf{Z}|x_1, \dots, x_n, \theta^{(l)})} [\ln f(x_1, \dots, x_n, \mathbf{Z}|\theta)].$$

در گام بعد پارامترهایی انتخاب می‌شوند که بر اساس آن‌ها امید ریاضی به دست آمده از مرحله‌ی قبل ماکسیمم مقدار شود یا به عبارتی:

$$\theta^{(t+1)} = \sup E_{f(\mathbf{Z}|x_1, \dots, x_n, \theta^{(t)})} [\ln f(x_1, \dots, x_n, \mathbf{Z}|\theta)]$$

در این جا منظور از  $\theta^{(t)}$  برآورد  $\theta$  در تکرار  $t$  ام می‌باشد. از آن جا که مقدار تابع درستمایی در هر تکرار افزایش می‌یابد، از این رو این الگوریتم، همگراست. بنا بر این برآوردهای به دست آمده از این روش به مقدار ماکسیمم درستمایی آن‌ها میل می‌کند.

اگر  $\alpha^{(t)}, \mu_1^{(t)}, \mu_2^{(t)}, \sigma_1^{2(t)}, \sigma_2^{2(t)}$  برآوردهای به دست آمده از مرحله‌ی  $t$  ام الگوریتم

باشند، امید تابع درستمایی مثال ۱ را با  $Q = Q(\alpha^{(t)}, \mu_1^{(t)}, \mu_2^{(t)}, \sigma_1^{2(t)}, \sigma_2^{2(t)})$  نشان می‌دهیم، و می‌توان آن را به صورت زیر نوشت:

$$Q = E \left[ \left\{ \frac{\alpha^{(t)}}{\sqrt{2\pi\sigma_1^{2(t)}}} \exp \left( -\frac{(x_i - \mu_1^{(t)})^2}{2\sigma_1^{2(t)}} \right) \right\}^{Z_i} \times \left\{ \frac{1 - \alpha^{(t)}}{\sqrt{2\pi\sigma_2^{2(t)}}} \exp \left( -\frac{(x_i - \mu_2^{(t)})^2}{2\sigma_2^{2(t)}} \right) \right\}^{1 - Z_i} \right]$$

$$= \sum_{i=1}^n E \left( Z_i | x_i, \mu_1^{(t)}, \sigma_1^{2(t)} \right) \left( \ln \alpha^{(t)} - \frac{1}{2} \ln (2\pi\sigma_1^{2(t)}) - \frac{(x_i - \mu_1^{(t)})^2}{2\sigma_1^{2(t)}} \right)$$



$$\begin{aligned}
 & + \left[ 1 - E \left\{ Z_i | x_i, \mu_{\gamma}^{(t)}, \sigma_{\gamma}^{2(t)} \right\} \right] \left[ \ln \{ 1 - \alpha^{(t)} \} - \frac{1}{\gamma} \ln \{ 2\pi \sigma_{\gamma}^{2(t)} \} - \right. \\
 & \left. \frac{\{ x_i - \mu_{\gamma}^{(t)} \}^2}{2\sigma_{\gamma}^{2(t)}} \right] \\
 (6) \quad & \text{سپس } E \left\{ Z_i | x_i, \mu_{\gamma}^{(t)}, \sigma_{\gamma}^{2(t)} \right\} \text{ محاسبه می‌شود:}
 \end{aligned}$$

$$E \left\{ Z_i | x_i, \mu_{\gamma}^{(t)}, \sigma_{\gamma}^{2(t)} \right\} = f \left( Z_i = 1 | x_i, \mu_{\gamma}^{(t)}, \sigma_{\gamma}^{2(t)} \right)$$

$$\begin{aligned}
 & = \frac{\alpha^{(t)} \phi \left( x_i; \mu_{\gamma}^{(t)}, \sigma_{\gamma}^{2(t)} \right)}{\alpha^{(t)} \phi \left( x_i; \mu_{\gamma}^{(t)}, \sigma_{\gamma}^{2(t)} \right) + (1 - \alpha^{(t)}) \phi \left( x_i; \mu_{\gamma}^{(t)}, \sigma_{\gamma}^{2(t)} \right)}
 \end{aligned}$$

و در نهایت از رابطه‌ی (۶) نسبت به پارامترها مشتق می‌گیریم:

$$\frac{\partial Q}{\partial \alpha^{(t)}} = \frac{\sum_{i=1}^n E \left\{ Z_i | x_i, \mu_{\gamma}^{(t)}, \sigma_{\gamma}^{2(t)} \right\} - n\alpha^{(t)}}{\alpha^{(t)}(1 - \alpha^{(t)})}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \mu_{\gamma}^{(t)}} = \frac{\sum_{i=1}^n E \left\{ Z_i | x_i, \mu_{\gamma}^{(t)}, \sigma_{\gamma}^{2(t)} \right\} (x_i - \mu_{\gamma}^{(t)})}{2\sigma_{\gamma}^{2(t)}}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \sigma_{\gamma}^{2(t)}} = \frac{\sum_{i=1}^n \left[ 1 - E \left\{ Z_i | x_i, \mu_{\gamma}^{(t)}, \sigma_{\gamma}^{2(t)} \right\} \right] (x_i - \mu_{\gamma}^{(t)})}{2\sigma_{\gamma}^{2(t)}}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \sigma_{\gamma}^2(t)} = \frac{\sum_{i=1}^n E \left\{ Z_i | x_i, \mu_{\gamma}^{(t)}, \sigma_{\gamma}^2(t) \right\} \left\{ (x_i - \mu_{\gamma}^{(t)})^2 - \sigma_{\gamma}^2(t) \right\}}{2 \sigma_{\gamma}^4(t)}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \sigma_{\gamma}^2(t)} = \frac{\sum_{i=1}^n \left[ 1 - E \left\{ Z_i | x_i, \mu_{\gamma}^{(t)}, \sigma_{\gamma}^2(t) \right\} \right] \left\{ (x_i - \mu_{\gamma}^{(t)})^2 - \sigma_{\gamma}^2(t) \right\}}{2 \sigma_{\gamma}^4(t)}$$

می‌توان نشان داد ماتریس مشتقات دوم پارامترها، معین منفی است و در نتیجه از برابر صفر قرار دادن مشتق  $Q$  برآورد پارامترها، که در هر مرحله به‌روز می‌شوند، را محاسبه کرد. به گونه‌ی ساده‌تر می‌توان الگوریتم EM را برای مثال ۱، به صورت زیر بیان کرد:

الگوریتم EM برای مدل آمیخته‌ی گاوسی دو مولفه‌ای:

گام اول: انتخاب مقادیر اولیه برای پارامترهای مدل  $(\mu_{\gamma}^{(t)}, \mu_{\gamma}^{(t)}, \sigma_{\gamma}^2(t), \sigma_{\gamma}^2(t), \alpha^{(t)})$  به ازای  $t = 0$ .

گام دوم: محاسبه‌ی امید ریاضی. در این مرحله احتمال متعلق بودن مشاهده‌ی  $i$ ام به مؤلفه‌ی اول (که آن را  $\gamma_i^{(t)}$  نامیده‌ایم) محاسبه می‌شود.

جدول ۱- توزیع پیشین و توزیع پسین برای پارامترهای مدل آمیخته‌ی گاوسی ( $k = 1, 2$ )

پارامترها	توزیع پیشین	توزیع شرطی کامل
$\alpha$	$D(\delta_{\gamma}, \delta_{\gamma})$	$D(\delta_{\gamma} + n, \delta_{\gamma} + n)$
$\mu_k$	$N(\mu_{\gamma}, \tau^{\gamma})$	$N\left(\frac{\tau^{\gamma} \sum_{i=1}^n x_i + \mu_{\gamma} \sigma_k^{\gamma}}{n_k \tau^{\gamma} + \sigma_k^{\gamma}}, \frac{1}{n_k \tau^{\gamma} + \sigma_k^{\gamma}}\right)$
$\sigma_k^{\gamma}$	$IG(\omega_{\gamma}, \beta_{\gamma})$	$IG\left(\omega_{\gamma} + \frac{1}{\gamma} n_k, \beta_{\gamma} + \frac{1}{\gamma} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_k)^{\gamma}\right)$

$$\gamma_i^{(t)} = \frac{\alpha^{(t)} \phi_{\theta_1^{(t)}}(x_i)}{\alpha^{(t)} \phi_{\theta_1^{(t)}}(x_i) + (1 - \alpha^{(t)}) \phi_{\theta_2^{(t)}}(x_i)}, \quad i = 1, \dots, n$$

گام سوم: ماکسیمم‌سازی. در این مرحله پارامترهای مدل حسب  $\gamma_i^{(t)}$  که از گام دوم به دست آمده، محاسبه می‌شود.

$$\mu_1^{(t+1)} = \frac{\sum_{i=1}^n \gamma_i^{(t)} x_i}{\sum_{i=1}^n \gamma_i^{(t)}}, \quad \mu_2^{(t+1)} = \frac{\sum_{i=1}^n (1 - \gamma_i^{(t)}) x_i}{\sum_{i=1}^n (1 - \gamma_i^{(t)})},$$

$$\sigma_1^{2(t+1)} = \frac{\sum_{i=1}^n \gamma_i^{(t)} (x_i - \mu_1^{(t)})^2}{\sum_{i=1}^n \gamma_i^{(t)}},$$

$$\sigma_2^{2(t+1)} = \frac{\sum_{i=1}^n (1 - \gamma_i^{(t)}) (x_i - \mu_2^{(t)})^2}{\sum_{i=1}^n (1 - \gamma_i^{(t)})},$$

$$\alpha^{(t+1)} = \sum_{i=1}^n \frac{\gamma_i^{(t)}}{n}.$$

گام چهارم: تکرار گام ۲ و ۳ تا رسیدن به همگرایی در براورد پارامترهای مدل. برای براورد پارامترهای مدل بر اساس الگوریتم EM از کدهای نوشته شده در بخش پیوست می‌توان استفاده کرد.

### ۳-۲-۳- براورد پارامترهای مدل آمیخته‌ی گاوسی با روش بیزی

در آمار بیز، باید اطلاعات موجود در خصوص پارامترهای مجهول را به صورت یک توزیع آماری، که به آن توزیع پیشین گفته می‌شود، بیان کرد. یکی از سراسرترین انتخاب‌ها برای توزیع پیشین، توزیع مزدوج است [۱]. یعنی خانواده‌ای از توزیع‌ها که اگر توزیع پارامتر به شرط مشاهدات را محاسبه کنیم، هم خانواده‌ی توزیع پیشین باشد. توزیع به

دست آمده توزیع پسین نام دارد. اساس استنباط بیزی بر پایه‌ی توزیع پسین و تابع زیانی است که در نظر گرفته می‌شود. به عبارت دیگر براوردگر بیز با توجه به تابع زیان در نظر گرفته شده تغییر می‌کند. به عنوان مثال اگر تابع زیان را به صورت توان‌های دوم خطا در نظر گرفته شود، براوردگر بیز برابر میانگین توزیع پسین می‌شود. در بسیاری از مسائل محاسبه‌ی این امید ریاضی به صورت تحلیلی وجود ندارد. روش مرسوم برای محاسبه‌ی آن با استفاده از روش شبیه‌سازی است، که به روش مونت کارلو (Monte Carlo) شهرت دارد. در این روش با تولید اعداد تصادفی از توزیع پسین، میانگین اعداد تولیدشده را به عنوان براورد پارامتر توزیع پسین در نظر می‌گیرند، که پشتوانه‌ی صحت و کارا بودن آن قانون ضعیف اعداد بزرگ است. با توجه به این‌که در مسئله‌ی پیش‌رو، ما نیاز به براورد هم‌زمان چند پارامتر داریم، و تولید اعداد تصادفی از توزیع توأم کار ساده‌ای نیست، لذا روش‌های گوناگونی برای تسهیل تولید اعداد تصادفی از توزیع‌های توأم، ارایه شده است. روش نمونه‌گیر گیبز از جمله روش‌های مونت کارلوی زنجیر مارکوفی می‌باشد که بر اساس توزیع شرطی مشاهدات، زنجیر مارکوفی از آن‌ها تولید می‌کند. این روش اولین بار در سال ۱۹۸۴ در مقاله‌ای توسط برادران گمن برای مدل‌های پردازش تصویر بیان شد، اما الگوریتمی که امروزه به عنوان الگوریتم گیبز در مسائل آماری از آن استفاده می‌کنیم، در سال ۱۹۹۰ توسط گلفند و اسمیت ارایه شد. نمونه‌گیر گیبز روشی برای تولید متغیرهای تصادفی بر اساس توزیع شرطی آن‌ها است. از سوی دیگر، از لحاظ نظری صحت و کارا بودن این روش براورد اثبات شده و پیاده‌سازی آن نیز دشواری زیادی ندارد [۱۲]. در این روش توزیع تک‌تک پارامترها به شرط بقیه متغیرها محاسبه می‌شود که توزیع شرطی کامل مشهور است. می‌توان نشان داد، با تولید اعداد تصادفی از توزیع‌های شرطی کامل، از آن‌ها بجای اعداد تصادفی از توزیع توأم در براورد بیز بهره برد.

به پارامترهای توزیع پیشین ابرپارامتر گفته می‌شود، بنا بر این اولین گام برای اجرای الگوریتم گیبز تعیین مقادیر اولیه برای ابرپارامترها می‌باشد. هرچند که روش‌های متفاوتی برای رهایی از تعیین این مقادیر اولیه وجود دارد، این وابستگی به مقادیر اولیه تأثیری در همگرایی روش نمونه‌گیر گیبز ندارد ولی زمان همگرایی را تغییر می‌دهد. مرسوم‌ترین روش برای تعیین ابرپارامترها استفاده از روش بیز تجربی پارامتری است. در این روش با در نظر گرفتن یک فرض اضافی روی مشاهدات، باعث استقلال توزیع حاشیه‌ای مشاهدات شده و به روش‌های آمار کلاسیک این ابرپارامترها را براورد می‌کند. هرچند از روش‌های

بیز سلسله مراتبی یا میانگین‌گیری بیزی نیز می‌توان استفاده کرد، روش بیز تجربی ساده‌تر و در عین حال کارایی مطلوبی دارد. در این مقاله ما بر اساس تجربه این مقادیر را تعیین کرده‌ایم. اگر این مقادیر را تغییر دهید مشاهده خواهید کرد که تغییر چندانی در نتایج شبیه‌سازی رخ نمی‌دهد.

در جدول ۱ توزیع پیشین مزدوج برای مثال ۱ آورده شده است [۵]. همان‌طور که می‌بینیم  $\tau^2, \nu, \beta_0, \omega, \delta = (\delta_1, \delta_2)$  ابرپارامترها برای توزیع‌های پیشین در نظر گرفته شده‌اند. بعد از تولید متغیرهای تصادفی بر اساس توزیع پیشین، وارد مرحله‌ی تکرار می‌شویم. در اولین گام از تکرار  $t$ ام، احتمال متعلق بودن هر مشاهده به دو زیرجامعه، بر حسب پارامترهای قبل‌تر یعنی مرحله‌ی  $(t-1)$ ام محاسبه می‌گردد. سپس بر اساس این اطلاعات به دست آمده، پارامترها بر اساس توزیع شرطی کامل‌شان از جدول ۱ تولید می‌گردند. حال به کمک روش‌های بیزی و جدول ۱ الگوریتم نمونه‌گیر گیبز را برای برآورد پارامترهای مدل آمیخته‌ی گاوسی (مثال ۱)، می‌توان به‌صورت ساده‌تر بیان کرد:

الگوریتم نمونه‌گیر گیبز برای مدل آمیخته‌ی گاوسی دو مولفه‌ای:

مرحله‌ی آغازین: در این مرحله مقادیر اولیه برای ابرپارامترهای توزیع پیشین  $\tau^2, \mu_0, \beta_0, \omega, \delta$  انتخاب می‌شوند، سپس بر اساس این ابرپارامترها از توزیع پیشین داده تولید می‌کنیم. توجه کنید که در این جا مقدار اولیه برای ابرپارامترهای هر دو زیرجامعه یکسان در نظر گرفته شده است.

مرحله‌ی تکرار: این مرحله برای هر  $t = 1, 2, \dots, T$  که  $T$  تعداد تکرار الگوریتم و بسته به نظر کاربر تعریف می‌شود، در دو گام انجام می‌شود:

گام اول: ابتدا  $Z_i$  از توزیع چند جمله‌ای با احتمال زیر تولید می‌شود.

$$P\left(Z_i = 1 \mid \mu_1^{(t-1)}, \sigma_1^{2(t-1)}, \alpha^{(t-1)}\right) = \frac{\alpha^{(t-1)} \phi_{\theta_1}^{(t-1)}(x_i)}{\alpha^{(t-1)} \phi_{\theta_1}^{(t-1)}(x_i) + \{1 - \alpha^{(t-1)}\} \phi_{\theta_2}^{(t-1)}(x_i)}$$

در این جا ذکر این نکته لازم است که  $\mu_1^{(t-1)}, \sigma_1^{2(t-1)}, \alpha^{(t-1)}$  در تکرار اول یعنی  $t = 1$  همان متغیرهای تصادفی تولیدشده از توزیع پیشین در مرحله‌ی آغازین می‌باشند.

**گام دوم:**  $\mu_1^{(t)}, \sigma_1^{2(t)}, \alpha^{(t)}$  بر اساس توزیع شرطی کامل‌شان در جدول ۱ تولید می‌شوند.

برای برآورد پارامترهای مدل با استفاده از الگوریتم گیبز، می‌توان کدهای بخش پیوست را به کار برد. نقطه‌ی داغیدن در این الگوریتم  $500$  در نظر گرفته شده است. در انتها، در بخش نتیجه‌گیری، نتایج به دست آمده از روش‌های مختلف را با یکدیگر مقایسه و مورد ارزیابی قرار می‌دهیم و برتری‌ها و محدودیت‌های هر یک را برای کاربران مشخص می‌کنیم.

#### ۴- نتیجه‌گیری

نتایج به دست آمده در جدول‌های ۲، ۳ و ۴ مربوط به داده‌های شبیه‌سازی شده از مدل آمیخته‌ی گاوسی دو مؤلفه‌ای به حجم  $1000$  در نرم‌افزار R می‌باشد. همان‌طور که می‌بینیم پارامترها، مقدار واقعی آن‌ها، مقدار اولیه‌ی پارامترها، متوسط مقدار برآوردشده، انحراف معیار و میانگین مربع خطای نمونه‌ای در ستون‌های این جداول نشان داده شده‌اند. میانگین مربع خطای نمونه‌ای به‌عنوان معیاری برای مقایسه‌ی دقت روش‌های شبیه‌سازی، در آمار کلاسیک، در نظر گرفته شده است، که از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\frac{1}{1000} \sum_{i=1}^{1000} (\hat{\theta}_i - \theta)^2$$

که  $\theta$  مقدار واقعی و  $\hat{\theta}_i$  مقادیر برآوردشده در هر الگوریتم می‌باشد. تعداد تکرار در هر روش  $1000$  در نظر گرفته شده و متوسط اختلاف مقدار واقعی و مقدار برآوردشده مبنای مقایسه‌ی روش‌هاست. همان‌گونه که انتظار داشتیم روش گیبز از EM و EM از عددی پاسخ بهتری به ما می‌دهد. اما زمان محاسباتی روش EM از عددی، و گیبز از EM بیشتر، ولی شرایط همگرایی آن‌ها کمتر است. در حالت کلی برآورد بیز پاسخ قابل قبول‌تری در مقایسه با دو روش دیگر ارائه داده است.

در پایان نیز برای قابل لمس بودن موارد استفاده از مدل‌های آمیخته کاربردهایی از آن، ارایه شده است.

### کاربردها

در سال‌های اخیر برای شناسایی گوینده (تشخیص صدا)، در متون مستقل، از مدل‌های آمیخته‌ی گاوسی استفاده می‌کنند. شناسایی گوینده، هنگامی که هیچ پیش‌فرضی از آن‌چه گوینده به زبان می‌آورد وجود ندارد، اصطلاحاً شناسایی گوینده با متون مستقل گفته می‌شود. برای هر گوینده مدل آمیخته‌ی گاوسی به گونه‌ای در نظر گرفته می‌شود که تابع احتمال پسین‌اش ماکسیمم مقدار شود. رینولد و روز در سال ۱۹۹۵ در مقاله‌ی [۱۱] نشان دادند که مدل آمیخته‌ی گاوسی برای شناسایی گوینده در متون مستقل، مدلی استوار می‌باشد.

علاوه بر تشخیص گوینده، از مدل آمیخته‌ی گاوسی برای شناسایی چهره‌ی افراد نیز استفاده می‌شود [۱۰]. مهم‌ترین مشکل در تشخیص چهره‌ی افراد و بازیابی آن، سایه روشن‌ها، تغییرات نور و پس‌زمینه‌های هم‌رنگ است. تشخیص چهره در مسائل امنیتی، تشخیص تغییرات در افراد و فهرست‌گذاری در تصاویر ویدئویی، کاربرد دارد. برای مدل‌بندی رنگ چهره‌ی (پوست) افراد نیز، می‌توان از مدل آمیخته‌ی گاوسی استفاده کرد. در روش خوشه‌بندی مبتنی بر مدل، که برای مشاهدات، مدلی احتمالاتی در نظر گرفته می‌شود، از مدل آمیخته‌ی گاوسی استفاده می‌شود. بدین صورت که در این روش، هر خوشه به وسیله‌ی یک توزیع پارامتری نشان داده می‌شود. آن‌گاه مدلی که برای کل داده‌ها ارایه می‌شود ترکیب آمیخته‌ی متناهی از این توزیع‌ها، می‌باشد. با استفاده از مدل آمیخته‌ی گاوسی، اطلاعات کامل‌تری درباره‌ی خوشه‌ها به دست می‌آوریم.

به‌دلیل انعطاف‌پذیری مدل آمیخته‌ی گاوسی برای انواع مختلفی از توزیع‌ها، در یافتن الگوهای برای امور مالی تجربی نیز، از مدل آمیخته‌ی گاوسی استفاده می‌شود. در مدل‌سازی مالی و کاربردهای آن، توزیع نرخ سود (بازده) در دارایی‌های مالی نقش مهمی دارد. متداول‌ترین فرض این است که نرخ سود دارایی‌ها، توزیع گاوسی دارد و از آن‌جا که دیگر توزیع‌ها نیز می‌توانند به خوبی با یک مدل آمیخته‌ی گاوسی متناهی تقریب زده شوند، این مدل در امور مالی مورد توجه بسیار قرار گرفته است.

همچنین مدل آمیخته‌ی گاوسی در نجوم، زیست‌شناسی، پزشکی و مهندسی نیز کاربرد بسیاری دارد که برای جزئیات بیشتر می‌توان به [۴]، [۶]، [۷] و [۱۳] مراجعه کرد.

جدول ۲- برآورد ماکسیمم درست‌نمایی با روش عددی

پارامترها	مقدار واقعی	مقدار اولیه	مقدار برآورد شده	انحراف معیار	میانگین مربع خطای نمونه‌ای
$\alpha_1$	۰٫۷	۰٫۵	۰٫۵۷۳۳۱۸۹	۰٫۲۴۵۸۲۱۲	۰٫۱۴۷۷۶۹۸
$\alpha_2$	۰٫۳	۰٫۵	۰٫۴۲۶۶۸۱۱	۰٫۲۴۵۸۲۱۲	۰٫۱۴۷۷۶۹۸
$\mu_1$	۳	۴	۲۹۳۰۶۹	۰٫۳۳۵۹۰۱۴	۰٫۱۰۱۸۳۳۴
$\mu_2$	۱	۱٫۶	۱٫۵۱۵۷۶۸	۰٫۹۰۸۲۸۲۵	۰٫۹۱۵۳۴۲۲
$\sigma_1$	۱	۰٫۳	۰٫۸۷۵۷۶۲۹	۰٫۲۲۶۰۸۹۵	۰٫۱۶۱۴۳۹۶۸
$\sigma_2$	۱٫۲	۰٫۸	۱٫۲۵۵۱۶۸۸	۰٫۳۵۳۷۲۸۷	۰٫۸۷۷۷۲۲۶۸

جدول ۳- برآورد ماکسیمم درست‌نمایی بر اساس الگوریتم EM

پارامترها	مقدار صحیح	مقدار اولیه	مقدار برآورد شده	انحراف معیار	میانگین مربع خطای نمونه‌ای
$\alpha_1$	۰٫۷	۰٫۵	۰٫۵۲۶۳۹۶	۰٫۱۹۴۳۷۷	۰٫۰۷۰۴۳۳۳۵
$\alpha_2$	۰٫۳	۰٫۵	۰٫۴۷۳۶۰۴	۰٫۱۹۴۳۷۷	۰٫۰۷۰۴۳۳۳۵
$\mu_1$	۳	۴	۳٫۱۰۸۸۳۶	۰٫۲۴۳۸۲۳۱	۰٫۰۶۵۳۵۰۰۳
$\mu_2$	۱	۱٫۶	۱٫۸۲۳۷۵۶	۰٫۳۱۹۹۵۳۱	۰٫۷۷۰۷۰۷۵۵
$\sigma_1$	۱	۰٫۳	۰٫۸۲۶۲۶۳۲	۰٫۳۳۴۴۰۵۷	۰٫۱۲۸۴۹۵۱
$\sigma_2$	۱٫۲	۰٫۸	۱٫۹۸۶۶۵۲۱	۰٫۲۱۳۹۵۶۳	۰٫۷۳۱۸۶۴۶



جدول ۴- براورد بیز بر اساس الگوریتم گیز

پارامترها	مقدار صحیح	مقدار براوردشده	انحراف معیار	میانگین مربع خطای نمونه‌ای
$\alpha_1$	۰٫۷	۰٫۶۳۷۲۹۱۵	۰٫۱۱۶۴۴۱۷	۰٫۰۴۲۳۴۱۱۵
$\alpha_2$	۰٫۳	۰٫۳۶۲۷۰۸۵	۰٫۱۱۶۴۴۱۷	۰٫۰۴۲۳۴۱۱۵
$\mu_1$	۳	۲٫۹۴۸۳۰۵	۰٫۱۴۶۳۴۳۴	۰٫۰۴۵۰۳۸۲
$\mu_2$	۱	۱٫۲۷۹۸۰۰	۰٫۲۱۶۹۶۳۴	۰٫۳۴۶۹۳۰۳
$\sigma_1$	۱	۱٫۰۸۴۸۲۸	۰٫۱۰۹۲۲۳۱	۰٫۰۴۳۲۵۲۸۸
$\sigma_2$	۱٫۲	۱٫۳۷۷۲۹۶	۰٫۲۹۵۵۳۸۳	۰٫۶۸۲۷۹۸۳۱

### قدردانی

نویسندگان بر خود واجب می‌دانند از پیشنهادات، نظرات و تصحیح‌های داوران محترم که باعث بهبود مقاله شده است، تشکر کنند. همچنین از آقای حسین هشیارمنش به‌خاطر خواندن متن نهایی و تصحیح برخی اشتباه‌های تایپی نویسندگان تشکر می‌شود.

### مرجع‌ها

- [1] Casella, G. and George, E.I. (1992). Explaining the Gibbs sampler. *The American Statistician*, 46, 167-174.
- [2] Dempster, A.P., Laird, N.M. and Rubin, D.B. (1977). Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm. *Journal of the Royal Statistical Society*, 39, 1-38.
- [3] Everitt, B. S. and Hand, D. J. (1981). *Finite Mixture Distributions*. Chapman and Hall, New York.
- [4] Greenspan, H., Goldberger, J. and Eshe, I. (2001). Mixture model for face-color modeling and segmentation. *Pattern Recognition Letters*, 22, 1525-1536.

- [5] Gonzalez, D.S., Kuruoglu, E. and Ruiz, D.P. (2010). with mixture of symmetric stable distributions using Gibbs sampling. *Modelling Signal Processing*, 90, 774-783.
- [6] Kon, S. (1984). Models of stock returns a comparison. *The Journal of Finance*, 39, 147-165.
- [7] McKenna, S., Gong, S. and Raja, Y. (1998). Modelling facial color and identity with Gaussian mixtures. *Pattern Recognition*, 31, 1883-1892.
- [8] Melnykov, V. and Maitra, R. (2010). Finite mixture models and model-based clustering. *Statistics Surveys*, 4, 80-116.
- [9] Pearson, K. (1894). Contributions to the mathematical theory of evolution source , *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 185, 71-110.
- [10] Reynolds, D.A., Quatieri, T.F. and Dunn R.B. (2000). Speaker verification using adapted Gaussian mixture models. *Digital Signal Processing*, 10, 19-41.
- [11] Reynolds, D.A. and Rose, R.C. (1995), Robust text-independent speaker identification using Gaussian mixture speaker models, *IEEE Transaction on Speech Audio Process*, 3, 72-83.
- [12] Robert, C.P and Casella, G. (2004). *Monte Carlo Statistical Methods*. Springer, New York.
- [13] Titterington, D.M., Smith, A.F.M. and Makov, U.E. (1985). *Statistical Analysis of Finite of Mixture Distributions*. Willey, New York.

## پیوست

### کد تولید اعداد تصادفی مدل آمیخته گاوسی

```
#Generating random sample from Gaussian mixture of 2  
components  
#n: sample size
```

..... مجله‌ی بررسی‌های آمار رسمی ایران، سال ۲۴، شماره‌ی ۲، پاییز و زمستان ۱۳۹۲، صص ۱۴۵-۱۶۵ .....

```
#alpha1: mixing proportion of the first component
#mean1: mean of the first component
#mean2: mean of the second component
#sigma1: sd of the first component
#sigma2: sd of the second component
n=1000
alpha=0.7
mean1=3
mean2=1
sigma1=1
sigma2=1.2
z=rbinom(n,1,alpha)
x=rnorm(n,
ifelse(z==1,mean1,mean2),ifelse(z==1,sigma1,sigma2))
```

### کد برآورد پارامترهای مدل آمیخته گاوسی با روش عددی

```
#At first, it is defined the likelihood function for
maximizing
#par: parameters of Gaussian mixture of 2 components
#par=c(mean1,mean2,sigma1,sigma2,alpha)
#x: univariate Gaussian mixture of 2 components
Likelihood=function(par,x){
f=par[5]*dnorm((x-par[1])/par[3])/par[3]+
(1-par[5])*dnorm((x-par[2])/par[4])/par[4]
if(any(f<=0)) Inf
else -sum(log(f))}
#initial values
intpar=c(4,1.6,0.3,0.8,0.5)
optim(intpar,Likelihood,x=x)$par
```

### کد برآورد پارامترهای مدل آمیخته گاوسی با روش الگوریتم EM

```
#EM Algorithm:
Em=function(par){
#stage 1: (E-step)
gamma=NULL
gamma=par[5]*dnorm(x,par[1],sqrt(par[3]))/((1-par[5])*
dnorm(x,par[2],sqrt(par[4]))+par[5]*dnorm(x,par[1],sqrt(
par[3])))
#stage 2: (M-step)
par[5] = (mean(gamma1))
par[1] = sum(gamma1*x)/sum(gamma1)
par[2] = sum((1-gamma1)*x)/sum(1-gamma1)
par[3] = sum(gamma1*((x-par[1])^2))/sum(gamma1)
par[4] = sum((1-gamma1)*((x-par[2])^2))/sum(1-gamma1)
```

..... مجله‌ی بررسی‌های آمار رسمی ایران، سال ۲۴، شماره‌ی ۲، پاییز و زمستان ۱۳۹۲، صص ۱۴۵-۱۶۵ .....

```

c(par[1],par[2],par[3],par[4],par[5])}
# Initial values for EM algorithm:
par0 = c(4,1.6,0.3,0.8,0.5)
# Running the EM algorithm
dis = 1
iter = 1
while (dis > 0.01 || iter <= 200){
iter = iter+1
param = Em(par0)
dis = max(abs(par0-param))
par0 = param
}
par0

```

### کد برآورد پارامترهای مدل آمیخته گاوسی با روش الگوریتم گیبز

```

#iteration: number of iterations of the algorithm.
##define initial values for parameters##
#Packages "rgenoud" and "multinomRob" should be installed.
library(rgenoud)
library(multinomRob)
k=2
iteration=1000
mix.new=mu.new= var.new=matrix(0,iteration,k)
z.new=matrix(0,length(x),k)
mix=mu=var=NULL
##define hyperparameter for prior distribution##
delta=mu.0= omega.0= betta.0=rep(1,k)
tau2=rep(9,k)
##generate random sample from the prior distributions##
for(i in 1:k){
mix[i]<-rgamma(n=1,shape=delta[i],rate=1)
mu[i]=rnorm(1,mu.0[i],sqrt(tau2[i]))
var[i]=1/rgamma(1,omega.0[i],betta.0[i])
}
mix=mix/sum(mix)
numer=matrix(0,nrow=length(x),ncol=k)
## Iteration step#####
for(it in 1:iteration)
{
## find the latent variable z#####
for(i in 1:k) {
numer[,i]=(mix[i]*dnorm(x,mean=mu[i],sd=sqrt(var[i])))
}
prob=numer/matrix(rep(rowSums(numer),k),ncol=k,byrow=F)
z=matrix(0,length(x),k)
for(j in 1:length(x)){

```

..... مجله‌ی بررسی‌های آمار رسمی ایران، سال ۲۴، شماره‌ی ۲، پاییز و زمستان ۱۳۹۲، صص ۱۴۵-۱۶۵ .....

```

z[j,]=t(rmultinomial(1,prob[j,]))
}
n.mix=apply(z,2,sum)
## generate parameters from Posterior distribution ####
for(i in 1:k) {
mix[i]=rgamma(1,shape=delta[i]+n.mix[i],rate=1)
mu[i]=rnorm(1,(tau2[i]*sum(x[z[,i]==1])+mu.0[i]*var[i])/
(n.mix[i]*tau2[i]+var[i]),sqrt((var[i]*tau2[i])/
(n.mix[i]*tau2[i]+var[i])))
var[i]=1/rgamma(1,shape=omega.0[i]+.5*n.mix[i],rate=
beta.0[i] + .5*sum(z[,i]*(x-mu[i])^2))
}
mix=mix/sum(mix)
##Save###
z.new=z.new+z
mix.new[it,]=mix
mu.new[it,]=mu
var.new[it,]=var
}
##END OF ITERATION STAGE###
##Compute mean between estimated parameter #####
apply(mix.new[(iteration/2):(iteration-10)],,2,mean)
apply(mu.new[(iteration/2):(iteration-10)],,2,mean)
apply(var.new[(iteration/2):(iteration-10)],,2,mean)

```

دنیا رحمانی

فوق لیسانس آمار

تهران، خیابان حافظ، دانشگاه صنعتی امیرکبیر (پلی‌تکنیک تهران)، دانشکده‌ی ریاضی و علوم کامپیوتر، گروه آمار.

عادل محمدپور

دکتری آمار

تهران، خیابان حافظ، دانشگاه صنعتی امیرکبیر (پلی‌تکنیک تهران)، دانشکده‌ی ریاضی و علوم کامپیوتر، گروه آمار.

رایانشانی: adel@aut.ac.ir