

## توزیع پواسون لیندلی نمایی شده؛ ویژگی‌ها و کاربردهای آن در قابلیت اطمینان

آنی‌تا عبدالهی نانوایشه

دانشگاه رازی

چکیده. در این مقاله، یک توزیع طول عمر سه پارامتری جدید به اسم توزیع پواسون لیندلی نمایی شده، معرفی شده است که با توجه به مقادیر پارامترهایش دارای تابع نرخ خطر افزایشی، کاهشی و وانی شکل وارون است. این توزیع در مطالعات حوزه‌های اقتصاد، بیمه، مدل‌های قابلیت اطمینان، طول عمر و مسائل صف‌بندی و علوم زیستی کاربرد دارد. در این مقاله ابتدا مشخصات ریاضی و آماری توزیع ارائه شده را بیان می‌کنیم و سپس کاربردهایی از توزیع جدید را با استفاده از مجموعه داده‌های واقعی ارائه می‌کنیم. سپس تابع مولد گشتاور، چولگی و کشیدگی را بیان خواهیم کرد. برآورد پارامترها با استفاده از روش ماکسیمم درست‌نمایی مورد بحث قرار خواهند گرفت. یک مطالعه شبیه‌سازی کوچک ارائه خواهد شد و در نهایت دو کاربرد از توزیع جدید با استفاده از مجموعه داده‌های واقعی ارائه می‌شود. نتایج نیز مناسب بودن توزیع جدید را برای مجموعه داده‌های واقعی تأیید می‌کنند.

واژه‌های کلیدی: توزیع لیندلی پواسون، توزیع لیندلی پواسون نمایی شده، داده‌های طول عمر.

### ۱- مقدمه

توزیع لیندلی برای اولین بار توسط لیندلی برای نشان دادن تفاوت بین توزیع اتکایی (فیدوشیال) و توزیع پوسین ارائه شد [۹]. این توزیع کاربرد وسیعی در مسائل قابلیت اطمینان و بقا دارد. تابع چگالی این توزیع به صورت زیر است:

$$f(x) = \frac{\theta^2}{(\theta+1)} (1+x) e^{-\theta x}, \quad x, \theta > 0,$$

این تابع چگالی نشان می‌دهد که توزیع لیندلی ترکیبی از توزیع نمایی با پارامتر مقیاس  $\theta$  و توزیع گاما با پارامتر شکل ۲ و پارامتر مقیاس  $\theta$  است. گیتانی و همکاران [۶] ویژگی‌های آماری توزیع لیندلی را ارائه کردند و نشان دادند که در بسیاری از موارد این توزیع کارایی بهتری را نسبت به سایر توزیع‌های توانی شناخته شده دارد. سنکران [۱۳] توزیع پواسون لیندلی گسسته را ارائه کرد که ترکیبی از توزیع پواسون و لیندلی بود. در سال (۲۰۰۸) گیتانی و همکاران [۵] توزیع پواسون لیندلی منقطع را ارائه کردند و به بیان ویژگی‌های آن پرداختند. کارهای بسیار دیگری نیز توسط محققان در این زمینه صورت گرفته است که در [۲]، [۴]، [۱۰]، [۱۴] و [۱۷] ارائه شده‌اند. ناداراجا و همکاران تعمیمی از توزیع لیندلی تعمیم‌یافته را ارائه کردند و ویژگی‌های ریاضی و آماری آن را بیان نمودند [۱۱].

مطالعات طول عمر نقش مهمی را در طیف گسترده‌ای از مسائل علمی ایفا می‌کند. کاس [۷] توزیع پواسون نمایی شده را ارائه کرد که ترکیبی از توزیع نمایی و توزیع پواسون ناقص است. چهکندی و گنجعلی [۳] یک خانواده از توزیع دو پارامتری جدید ارائه کردند که دارای نرخ خطر کاهشی بوده و ترکیبی از توزیع سری توانی و توزیع نمایی بود. ونهو و همکاران یک توزیع ترکیبی جدید به نام توزیع پواسون لیندلی ارائه کردند [۱۶]. هدف از این مقاله ارائه توزیع جدیدی به نام توزیع پواسون لیندلی نمایی شده است که کاربردهای زیادی در مدل‌بندی داده‌های طول عمر دارد و مزیت آن این است که این مدل نسبت به سایر مدل‌ها دارای فرم‌های ساده تابع توزیع و چگالی به لحاظ ریاضی بوده و تنها دارای ۳ پارامتر است.

تابع چگالی احتمال توزیع پواسون لیندلی به صورت زیر است:

$$(1) \quad f(x) = \frac{\theta^2 \lambda (x+1) e^{-\theta x}}{(\theta+1)(e^\lambda - 1)}, \quad x > 0, \lambda, \theta > 0.$$

که  $\lambda$  پارامتر شکل و  $\theta$  پارامتر مقیاس است. تابع بقای متناظر با رابطه (۱) به صورت زیر است:

$$(۲) \quad S(x) = 1 - \frac{e^{\lambda} - e^{\frac{\lambda e^{-\theta x}(\theta + \theta x + 1)}{\theta + 1}}}{(e^{\lambda} - 1)}$$

هدف از این مقاله ارائه یک توزیع سه پارامتری جدید است که دارای نرخ خطر افزایشی، کاهشی و وانی شکل وارون با توجه به مقادیر پارامترهایش است که بسیار انعطاف‌پذیر در مدل‌بندی داده‌های طول عمر می‌باشد و ما آن را توزیع پواسن لیندلی نمایی شده (E-LP)<sup>۵</sup> می‌نامیم.

## ۲- مدل جدید

فرض کنید  $X$  یک متغیر تصادفی با توزیع پواسن لیندلی باشد (LP) در این صورت تابع توزیع تجمعی آن به صورت زیر است:

$$(۳) \quad F(x) = \frac{e^{\lambda} - e^{\frac{\lambda e^{-\theta x}(\theta + \theta x + 1)}{\theta + 1}}}{(e^{\lambda} - 1)}, \quad x > 0, \lambda, \theta > 0,$$

که  $\lambda$  پارامتر شکل و  $\theta$  پارامتر مقیاس است. حال فرض کنید  $X$  یک متغیر تصادفی با تابع توزیع تجمعی رابطه (۳) باشد در این صورت تابع توزیع نمایی شده آن؛ یعنی تابع توزیع پواسن لیندلی نمایی شده به صورت زیر است:

$$(۴) \quad F(x) = \left[ \frac{e^{\lambda} - e^{\frac{\lambda e^{-\theta x}(\theta + \theta x + 1)}{\theta + 1}}}{(e^{\lambda} - 1)} \right]^{\gamma}; \quad x > 0, \lambda, \theta > 0, \gamma > 0$$

با مشتق‌گیری از رابطه بالا تابع چگالی احتمال توزیع ارائه شده به صورت زیر به دست می‌آید:

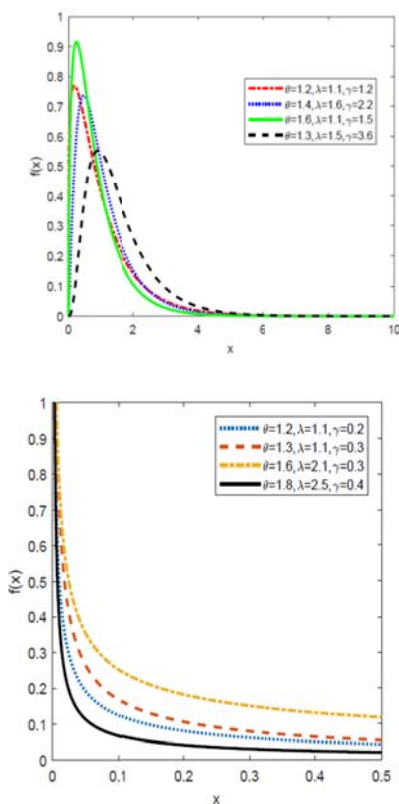
$$(۵) \quad f(x) = \gamma \left( \frac{\theta^{\lambda} \lambda (x+1) e^{\frac{\lambda e^{-\theta x}(\theta + \theta x + 1)}{\theta + 1} - \theta x}}{(\theta + 1)(e^{\lambda} - 1)} \right) \left[ \frac{e^{\lambda} - e^{\frac{\lambda e^{-\theta x}(\theta + \theta x + 1)}{\theta + 1}}}{(e^{\lambda} - 1)} \right]^{\gamma - 1};$$

$$x > 0, \lambda, \theta > 0, \gamma > 0,$$

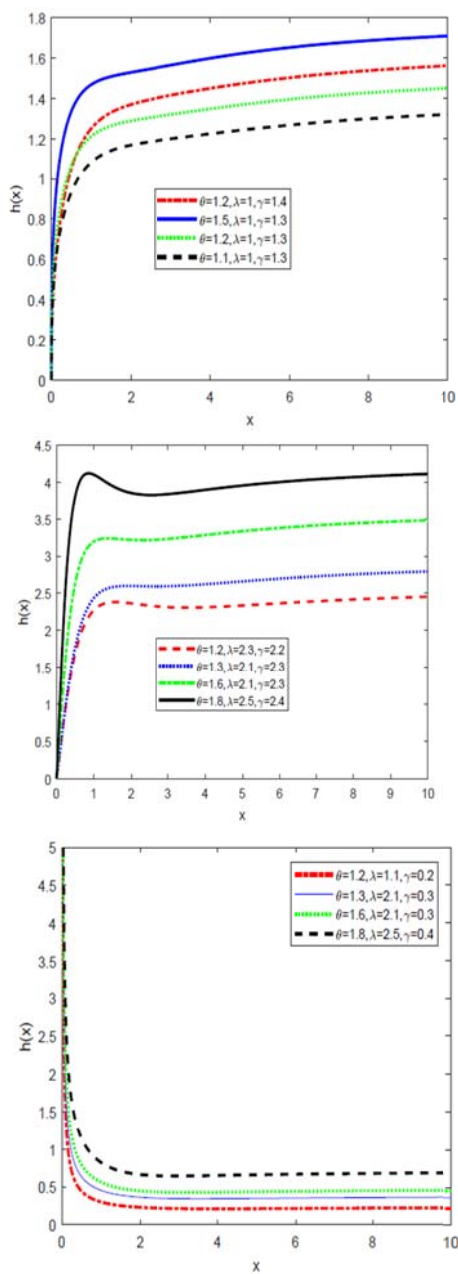
تابع نرخ خطر این توزیع نیز به صورت زیر است:

$$(۶) \quad h(x) = \frac{\frac{\lambda e^{-\theta x(\theta+\theta x+1)}}{\theta+1} - \theta x \frac{\lambda e^{-\theta x(\theta+\theta x+1)}}{\theta+1}}{\gamma \left( \frac{\theta^\gamma \lambda (x+1) e^{-\theta x(\theta+\theta x+1)}}{(\theta+1)(e^\lambda-1)} \right) \left[ \frac{e^\lambda - e^{-\theta x(\theta+\theta x+1)}}{(e^\lambda-1)} \right]^{\gamma-1}}{1 - \left[ \frac{e^\lambda - e^{-\theta x(\theta+\theta x+1)}}{(e^\lambda-1)} \right]}$$

در شکل زیر تابع چگالی احتمال توزیع (E-LP) به ازای مقادیر مخفف پارامترها رسم شده است. همان طور که مشخص است تابع چگالی احتمال این توزیع بسیار انعطاف پذیر است.



شکل ۱- تابع چگالی احتمال توزیع (E-LP) به ازای مقادیر مختلف پارامترها



شکل ۲- تابع خطر توزیع (E-LP) به ازای مقادیر مختلف پارامترها

### ۳- گشتاورهای توزیع (E-LP)

گشتاورها نقش مهمی را در تحلیل‌های آماری ایفا می‌کنند. آنها در بیان ویژگی‌ها و رفتارهای یک توزیع کاربرد بسیاری دارند.

در این بخش گشتاورهای مدل معرفی شده را ارائه خواهیم کرد ولی قبل از آن به ارائه بسط  $f(x)$  که در محاسبه گشتاورها مورد نیاز است می‌پردازیم. با استفاده از بسط دوجمله‌ای و نمایی،

$$(a+b)^n = \sum_{x=0}^n \binom{n}{x} a^x b^{n-x}$$

$$e^x = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

داریم:

$$f(x) = \frac{\gamma \theta^\gamma \lambda^{(x+1)}}{(\theta+1)(e^\lambda-1)^\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\binom{n}{k} \left( \frac{\lambda e^{-\theta x} (\theta + \theta x + 1)}{\theta + 1} \right)^k (-\theta x)^{n-k}}{n!} \sum_{j=0}^{\gamma-1} \binom{\gamma-1}{j} (e^\lambda)^j \left( -e^{\frac{\lambda e^{-\theta x} (\theta + \theta x + 1)}{\theta + 1}} \right)^{\gamma-1-j}$$

$$(Y) = \frac{\gamma \theta^\gamma \lambda^{(x+1)}}{(\theta+1)(e^\lambda-1)^\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\gamma-1} \frac{\binom{n}{k} \left( \frac{\lambda e^{-\theta x} (\theta + \theta x + 1)}{\theta + 1} \right)^k (-\theta x)^{n-k}}{n!} \binom{\gamma-1}{j} (e^\lambda)^j \left( -e^{\frac{\lambda e^{-\theta x} (\theta + \theta x + 1)}{\theta + 1}} \right)^{\gamma-1-j}$$

در این صورت با استفاده از رابطه بالا داریم:

$$M(x) = \int_0^{\infty} e^{tx} f(x) dx$$

$$(A) = \frac{\gamma \theta^\gamma \lambda^{(x+1)}}{(\theta+1)(e^\lambda-1)^\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\gamma-1} \frac{\binom{n}{k} \binom{\gamma-1}{j} (e^\lambda)^j}{n!} \times \int_0^{\infty} e^{tx} (\lambda e^{-\theta x} (\theta + \theta x + 1))^k (-\theta x)^{n-k} \left( -e^{\frac{\lambda e^{-\theta x} (\theta + \theta x + 1)}{\theta + 1}} \right)^{\gamma-1-j} dx$$

عبارت بالا دارای فرم بسته‌ای نیست و بنا بر این نیاز است که با استفاده از محاسبات عددی محاسبه شود.

گشتاور مرتبه  $r$  ام توزیع ارائه شده از رابطه زیر به دست می‌آید که نمی‌تواند به صورت یک فرم ساده بسته بیان شود بنابراین باید به صورت عددی محاسبه گردد.

$$E[X^r] = \int_0^{\infty} x^r f(x) dx$$

$$(9) = \frac{\gamma \theta^\gamma \lambda^{(\gamma+1)}}{(\theta+1)(e^\lambda-1)^\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^n \frac{\binom{n}{k}}{n!} \binom{\gamma-1}{j} (e^\lambda)^j$$

$$\times \int_0^{\infty} x^r (\lambda e^{-\theta x} (\theta + \theta x + 1))^k (-\theta x)^{n-k} \left( -e^{-\frac{\lambda e^{-\theta x} (\theta + \theta x + 1)}{\theta+1}} \right)^{\gamma-1-j} dx$$

#### ۴- تابع درستنمایی ماکزیم (MLE)

اگر  $X_1, \dots, X_n$  نمونه‌ای تصادفی با اندازه  $n$  از توزیع E-LP باشند در این صورت تابع ماکسیم درستنمایی این توزیع به صورت زیر است:

$$L(x|\lambda, \theta, \gamma) =$$

$$\prod_{i=1}^n \gamma \left( \frac{\theta^\gamma \lambda^{(\gamma+1)} e^{-\frac{\lambda e^{-\theta x_i} (\theta + \theta x_i + 1)}{\theta+1}}}{(\theta+1)(e^\lambda-1)^\gamma} \right) \prod_{i=1}^n \left[ \frac{e^\lambda - e^{-\frac{\lambda e^{-\theta x_i} (\theta + \theta x_i + 1)}{\theta+1}}}{(e^\lambda-1)} \right]^{\gamma-1}$$

$$= \left( \frac{\gamma \theta^\gamma \lambda^{(\gamma+1)}}{(\theta+1)(e^\lambda-1)^\gamma} \right)^n \prod_{i=1}^n \left( (x_i + 1) e^{-\frac{\lambda e^{-\theta x_i} (\theta + \theta x_i + 1)}{\theta+1}} \right)$$

$$\times \prod_{i=1}^n \left[ \frac{e^\lambda - e^{-\frac{\lambda e^{-\theta x_i} (\theta + \theta x_i + 1)}{\theta+1}}}{(e^\lambda-1)} \right]^{\gamma-1}$$

در نتیجه لگاریتم تابع درستنمایی به صورت زیر است:

$$l(x|\lambda, \theta, \gamma) = n \log \gamma + \gamma n \log \theta + n \log \lambda - n \log(\theta + 1) - n \log(e^\lambda - 1) + \sum_{i=1}^n \log \left[ \left( (x_i + 1) e^{\frac{\lambda e^{-\theta x_i}(\theta + \theta x_i + 1)}{\theta + 1} - \theta x_i} \right) \right] + (\gamma - 1) \sum_{i=1}^n \log \left[ \frac{e^{\lambda - e^{\frac{\lambda e^{-\theta x_i}(\theta + \theta x_i + 1)}{\theta + 1} - \theta x_i}}}{(e^\lambda - 1)} \right]$$

با مشتق‌گیری از رابطه (۱۰) نسبت به پارامترها و با فرض  $A = e^{\frac{\lambda e^{-\theta x_i}(\theta + \theta x_i + 1)}{\theta + 1}}$  داریم:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L(\lambda, \theta, \gamma)}{\partial \lambda} &= \frac{n}{\lambda} - n \frac{e^\lambda}{(e^\lambda - 1)} \\ &+ \sum_{i=1}^n \frac{\left[ \left( \frac{e^{-\theta x_i}(\theta + \theta x_i + 1)}{\theta + 1} \right) (A e^{-\theta x_i})(x_i + 1) \right]}{\left[ \left( (x_i + 1) A e^{-\theta x_i} \right) \right]} \\ &+ (\gamma - 1) \sum_{i=1}^n \left[ \frac{(e^\lambda - 1)^\gamma}{\left[ \frac{e^\lambda - A}{(e^\lambda - 1)} \right]} - \frac{(e^\lambda - 1)^\gamma}{\left[ \frac{e^\lambda - A}{(e^\lambda - 1)} \right]} \right] \\ \frac{\partial \ln L(\lambda, \theta, \gamma)}{\partial \theta} &= \frac{\gamma n}{\theta} - \frac{n}{(\theta + 1)} \\ &+ \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\left[ \left( (x_i + 1) \right) \left[ \frac{\lambda(-e^{-\theta x_i}(\theta + \theta x_i + 1) + e^{-\theta x_i}(\gamma + x_i)(\gamma + \theta) - \lambda(-e^{-\theta x_i}(\theta + \theta x_i + 1)) - 1) A e^{-\theta x_i}}{(\theta + 1)^\gamma} \right] \right]}{\left[ \left( (x_i + 1) A e^{-\theta x_i} \right) \right]} \right. \\ &\left. + (\gamma - 1) \sum_{i=1}^n \frac{\left[ \frac{\lambda(-e^{-\theta x_i}(\theta + \theta x_i + 1) + e^{-\theta x_i}(\gamma + x_i)(\gamma + \theta) - \lambda(-e^{-\theta x_i}(\theta + \theta x_i + 1)) - 1) A e^{-\theta x_i}}{(\theta + 1)^\gamma} \right]}{\left[ \frac{e^\lambda - A}{(e^\lambda - 1)} \right]} \right] \\ \frac{\partial \ln L(\lambda, \theta, \gamma)}{\partial \gamma} &= \frac{n}{\gamma} + \sum_{i=1}^n \log \left[ \frac{e^\lambda - A}{(e^\lambda - 1)} \right] \end{aligned}$$



برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامترها با برابر صفر قرار دادن عبارات بالا و با استفاده از حل تابع غیر خطی به دست می‌آیند که دارای فرم بسته‌ای نیستند. روش تکرار نیوتن رافسون برای حل معادلات درستنمایی و به دست آوردن پارامترهای توزیع می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد. برای ارائه برآورد بازه‌ای، فاصله اطمینان و آزمون فرض روی پارامترها، نیاز به ماتریس اطلاع داریم. ماتریس اطلاع مشاهده شده به صورت زیر است:

$$I_n(\Theta) = - \begin{bmatrix} I_{\lambda\lambda} & I_{\lambda\theta} & I_{\lambda\gamma} \\ I_{\theta\lambda} & I_{\theta\theta} & I_{\theta\gamma} \\ I_{\gamma\lambda} & I_{\gamma\theta} & I_{\gamma\gamma} \end{bmatrix}$$

که  $\Theta = (\lambda, \theta, \gamma)^T$ . عبارات واضحی برای عناصر ماتریس اطلاع مشاهده شده وجود دارد.

$$I_{\lambda\lambda} = \frac{\partial^2 l}{\partial \lambda^2}, \quad I_{\lambda\theta} = \frac{\partial^2 l}{\partial \lambda \partial \theta}, \quad I_{\lambda\gamma} = \frac{\partial^2 l}{\partial \lambda \partial \gamma}$$

$$I_{\theta\lambda} = \frac{\partial^2 l}{\partial \theta \partial \lambda}, \quad I_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 l}{\partial \theta^2}, \quad I_{\theta\gamma} = \frac{\partial^2 l}{\partial \theta \partial \gamma}$$

$$I_{\gamma\lambda} = \frac{\partial^2 l}{\partial \gamma \partial \lambda}, \quad I_{\gamma\theta} = \frac{\partial^2 l}{\partial \gamma \partial \theta}, \quad I_{\gamma\gamma} = \frac{\partial^2 l}{\partial \gamma^2}$$

تحت شرایطی که برای پارامترها در خارج از فضای پارامتری انجام می‌شود نه روی مرزها، توزیع مجانبی  $\sqrt{n}(\hat{\Theta} - \Theta)$  همگرا به توزیع  $(\vartheta, I^{-1}(\vartheta))$  است که  $I(\vartheta)$  ماتریس اطلاع مورد انتظار است [۸]. توزیع نرمال چندمتغیره  $(\vartheta, I^{-1}(\vartheta))$  می‌تواند برای ایجاد بازه‌های اطمینان دو طرفه  $(1 - \eta)100\%$  درصدی برای پارامترهای مدل به کار رود که  $\eta$  سطح معناداری است.

## ۵ - مطالعه شبیه‌سازی

به منظور ارزیابی عملکرد روش ماکسیمم درستنمایی، یک مطالعه شبیه‌سازی کوچک با استفاده از ده هزار نمونه، شامل  $300$  و  $50$  داده تصادفی تولید شده از مدل جدید ارائه

شده در این مقاله، در محیط نرم افزار R انجام شده است. ارزیابی برآوردها بر مبنای موارد زیر انجام می شود:

مقدار اریبی، میانگین مربعات خطا و میانگین خطای نسبی برای هر داده شبیه سازی مثلاً  $(\hat{\lambda}, \hat{\theta}, \hat{\gamma})$  برای  $(i=1, 2, \dots, 10000)$  تعیین می شوند. تعداد تکرارها ۱۰۰۰۰ است. مقدار اریبی و میانگین مربعات خطا و میانگین خطای نسبی از فرمول های زیر به دست می آیند:

$$\text{bias}_h(n) = \frac{1}{10000} \sum_{i=1}^{10000} (\hat{h}_i - h);$$

$$\text{MSE}_h(n) = \frac{1}{10000} \sum_{i=1}^{10000} (\hat{h}_i - h)^2$$

$$\text{MRE}_h(n) = \frac{1}{10000} \sum_{i=1}^{10000} \left(\frac{\hat{h}_i}{h}\right)$$

برای  $h=(\lambda, \theta, \gamma)$ . اندازه نمونه را برابر ۳۰۰ و  $n=50$  و مقادیر مختلف پارامترها را در نظر می گیریم. نتایج در جدول ۲ ارائه شده اند که نشان دهنده این است که نتایج کاملاً پایدار هستند و مهم تر این که برای این اندازه از نمونه، به مقادیر واقعی نزدیک هستند. علاوه بر این با افزایش اندازه نمونه مقدار MSE کاهش می یابد.

جدول ۱- مقادیر اریبی و میانگین مربعات خطا و میانگین خطای نسبی برآوردها تحت روش ماکسیم درستنمایی

$(\lambda, \theta, \gamma) = (2, 2, 3)$				$(\lambda, \theta, \gamma) = (2, 2, 2)$					
MRE	MSE	Bias	Parameters	n	MRE	MSE	Bias	Parameters	n
۱/۱۵۲	۰/۶۲۱	۰/۳۴۷	$\lambda$		۱/۰۹۲	۰/۳۴۵	۰/۱۷۴	$\lambda$	
۱/۰۴۲	۰/۳۹۸	۰/۰۹۲	$\theta$	۵۰	۱/۰۴۲	۰/۰۹۱	۰/۰۸۷	$\theta$	۵۰
۱/۰۲۶	۰/۰۸۸	۰/۰۷۵	$\gamma$		۱/۰۳۸	۰/۰۶۴	۰/۰۵۴	$\gamma$	
۱/۰۱۱	۰/۰۴۲	۰/۰۴۱	$\lambda$		۱/۰۱۶	۰/۰۲۱	۰/۰۳۶	$\lambda$	
۱/۰۰۹	۰/۰۳۶	۰/۰۲۳	$\theta$	۳۰۰	۱/۰۰۸	۰/۰۱۳	۰/۰۱۸	$\theta$	۳۰۰
۱/۰۰۱	۰/۰۱۷	۰/۰۰۹	$\gamma$		۱/۰۰۲	۰/۰۱۱	۰/۰۰۶	$\gamma$	

## ۶- کاربردها

در این بخش کاربردهایی از توزیع ارائه شده را بیان می‌کنیم و نشان می‌دهیم که توزیع E-LP برازش بهتری را نسبت به سایر مدل‌ها برای مجموعه داده‌های طول عمر فراهم می‌کند. ما این توزیع را (ELP) با توزیع‌های طول عمر پواسن لیندلی<sup>۲</sup> (LP)، گمپرتز پواسن<sup>۳</sup> (GP) و توزیع لوماکس نمایی شده<sup>۴</sup> (EL) مقایسه می‌کنیم. همه محاسبات با استفاده از نرم‌افزارهای R و MATLAB انجام شده‌اند. اولین مجموعه از داده‌های ارائه شده، مربوط به داده‌های ۶۳ مقدار ثبت شده از مقاومت فایبرگلاس‌های ۱/۵ سانتی‌متری که در آزمایشگاه فیزیک ملی در انگلستان اندازه‌گیری شده است، می‌باشد که در پیوست A ارائه شده‌اند.

دومین مجموعه از داده‌ها مربوط به زمان خرابی ۴۰ دستگاه توربو ماشین است که در پیوست ارائه شده‌اند.

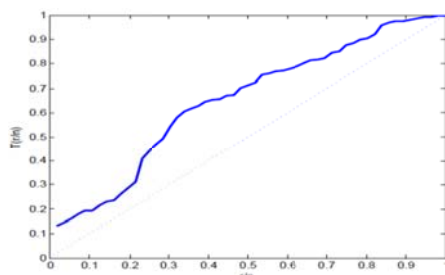
در بسیاری از کاربردها، اطلاعاتی کیفی درباره نمودارهای نرخ شکست وجود دارد که می‌توانند در انتخاب یک مدل مشخص ما را یاری کنند. یک روش آزمون بسیار مفید، استفاده از نمودار (TTT) می‌باشد [۱]. نمودار TTT با استفاده از نمودار

$$T(r/n) = [\sum_{i=1}^n y_{i:n} + (n-r)y_{r:n}] / \sum_{i=1}^n y_{i:n}$$

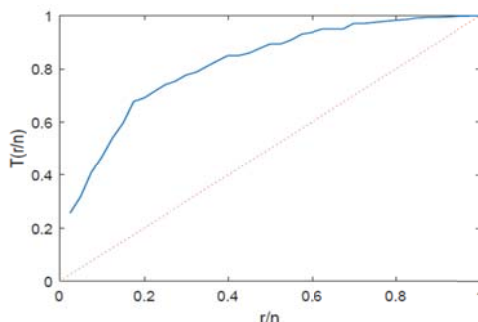
در برابر  $r/n$  به دست می‌آید که  $r = 1, \dots, n$  و  $(i = 1, \dots, n)$  آماره‌های ترتیبی نمونه هستند. برای تابع نرخ شکست ثابت، نمودار قطری مورب، برای نرخ شکست کاهشی نمودار محدب و برای نرخ شکست افزایشی نمودار مقعر است. اگر تابع نرخ شکست  $u$  شکل باشد نمودار ابتدا مقعر و سپس محدب است. نمودارهای TTT مربوط به داده‌های ارائه شده در نمودارهای زیر رسم شده‌اند.

جهت بررسی نیکویی برازش توزیع‌های آماری ارائه شده با توزیع داده‌های واقعی، از آزمون  $k-s$  (کلموگروف-اسمیرنوف)، BIC و AIC استفاده شد. در جدول ۲، MLE داده‌ها و آزمون کلموگروف-اسمیرنوف، مقدار BIC و AIC برای مجموعه داده‌های واقعی، ارائه

شده‌اند. همان طور که مشخص است با توجه به معیارهای AIC و BIC (بر اساس کمترین مقدار) مدل ارائه شده بهترین برازش را برای مجموعه داده‌ها فراهم می‌کند.



(الف)



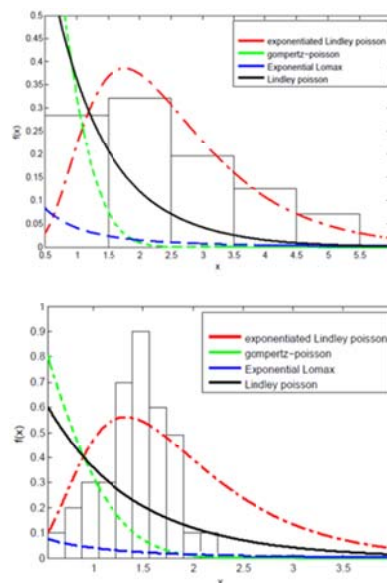
(ب)

شکل ۳- نمودارهای TTT مربوط به داده‌های ارائه شده

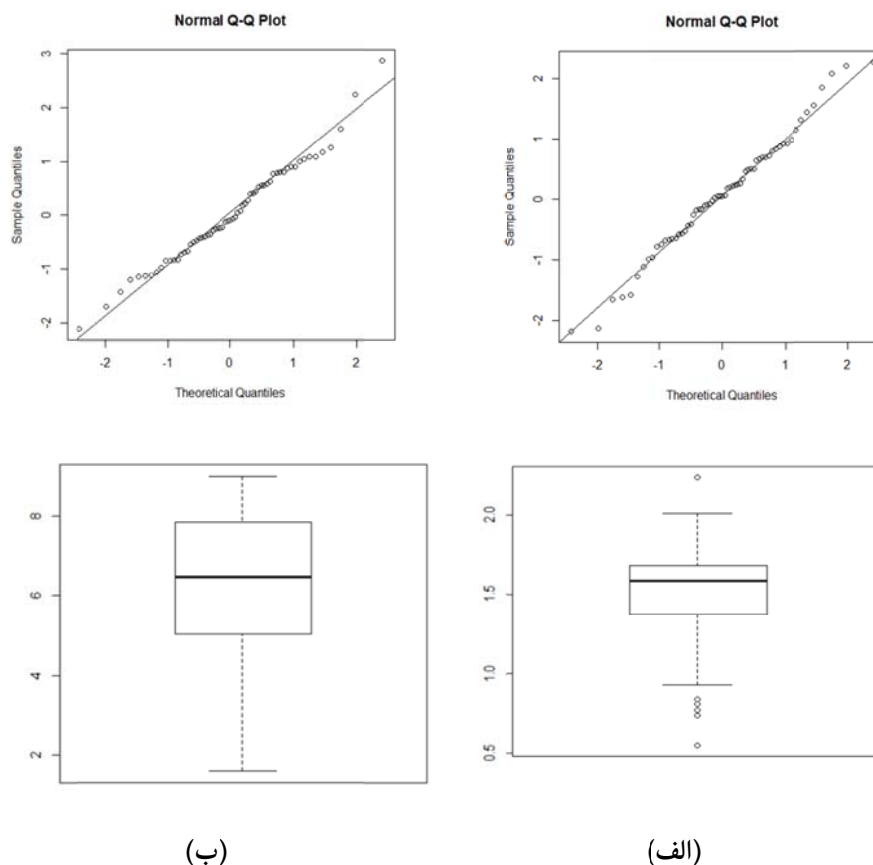
جدول ۲- برآورد ماکسیمم درست‌نمایی پارامترها و آزمون نیکویی برازش برای مجموعه داده‌های واقعی

DIST	MLEs	K-S	AIC	BIC
E-LP	$\hat{\theta} = ۱,۶۰۱۷, \hat{\lambda} = ۰,۷۲۱۹, \hat{\gamma} = ۱,۰۷۶۰,$	۰,۱۰۱۱	۲۹,۵۶	۴۷,۸۹
GP	$\hat{\alpha} = ۰,۱۰۲۱, \hat{\beta} = ۲,۳۷۳۰, \hat{\lambda} = ۳,۶۶۷۸$	۰,۱۰۳۲	۳۲,۷۱	۵۱,۵۷
EL	$\hat{\alpha} = ۰,۵۹۹۲, \hat{\theta} = ۱,۸۷۹۵, \hat{\lambda} = ۰,۹۷۵۸,$	۰,۱۸۹۳	۳۹,۲۵	۶۴,۳۹
LP	$\hat{\lambda} = ۱,۱۸۰۸۵, \hat{\theta} = ۰,۳۲۵۶۸,$	۰,۱۰۲۶	۳۱,۵۲	۴۹,۲۷
E-LP	$\hat{\theta} = ۰,۵۷۱۲۸, \hat{\lambda} = ۰,۶۷۸۰, \hat{\gamma} = ۰,۱۵۶۴,$	۰,۰۶۴۳	۱۶۲,۹۷	۱۷۹,۶۵
GP	$\hat{\alpha} = ۰,۰۰۸۵, \hat{\beta} = ۰,۶۱۲, \hat{\lambda} = ۰,۳۱۳۳,$	۰,۰۸۷۱	۱۶۵,۸۶	۱۸۱,۹۹
EL	$\hat{\alpha} = ۰,۴۱۰۷, \hat{\theta} = ۲,۷۹۱۵, \hat{\lambda} = ۰,۹۲۴۳,$	۰,۱۰۳۹	۱۶۷,۶۲	۱۸۹,۱۳
LP	$\hat{\lambda} = ۱,۰۹۴۱, \hat{\theta} = ۰,۴۶۰۳,$	۰,۰۷۹۲	۱۶۴,۳۴	۱۸۰,۶۵

همان‌طور که از جدول مشخص است توزیع جدید نسبت به سایر توزیع‌ها دارای کمترین مقدار آماره آزمون می‌باشد و این بدان معنی است که توزیع E-LP نسبت به سایر توزیع‌ها برازش بهتری را برای این مجموعه از داده‌های واقعی فراهم می‌کند. در شکل ۴ نمودار تابع چگالی احتمال چندین توزیع و هیستوگرام داده‌های واقعی ارائه شده، جهت انتخاب بهترین توزیع برای برازش به داده‌ها رسم شده است. همان‌طور که از شکل‌ها مشخص است توزیع E-LP، نسبت به سایر مدل‌ها، برازش بهتری را روی این مجموعه از داده‌ها فراهم می‌کند. شکل ۵ نمودار احتمال نرمال و نمودار جعبه‌ای داده‌ها را نشان می‌دهد.



شکل ۴: نمودارهای تابع‌های چگالی احتمال برازش داده شده‌ی توزیع‌های در نظر گرفته به همراه هیستوگرام برای مجموعه داده‌ها



شکل ۵- نمودار احتمال نرمال و نمودار جعبه‌ای برای مجموعه داده‌های اول (الف) و دوم (ب)

## نتیجه‌گیری

در این مقاله مدل جدیدی از توزیع LP به نام توزیع پواسون لیندلی نمایی شده E-LP بیان و ویژگی‌های آن ارائه شد. این مدل نسبت به سایر مدل‌ها (لوماکس نمایی شده، گمپرتز پواسون و ...) دارای فرم‌های ساده تابع توزیع و چگالی به لحاظ ریاضی بوده و تنها دارای ۳ پارامتر است. تابع نرخ خطر این توزیع به صورت افزایشی، کاهش‌ی و u شکل وارون با توجه به مقادیر پارامترهایش است.

به‌عنوان نتیجه‌ی کلی، می‌توان گفت که توزیع ارائه‌شده مکانیسم نسبتاً انعطاف‌پذیری برای برازش طیف وسیعی از مجموعه داده‌های واقعی مثبت (داده‌های طول عمر) فراهم می‌کند و بنابراین می‌تواند جایگزین مناسبی برای الگوهای موجود دیگر در منابع، در الگوبندی داده‌های واقعی در زمینه‌های اقتصاد، مهندسی، تحلیل بقا و مسائل هیدرولوژیکی باشد. محاسبات و شکل‌ها با استفاده از نرم‌افزارهای R، matlab، maple، انجام شده است [۱۵] و [۱۲]. مطالعه برخی از این ویژگی‌های دیگر این توزیع از جمله آماره‌های ترتیبی، گشتاورهای آماره ترتیبی، توزیع مجانبی آماره‌های اکسترم، ترتیب‌های تصادفی، آنتروپی و آنتروپی تجمعی باقیمانده، توزیع نسبت دو متغیر تصادفی می‌توانند موضوع تحقیقات آینده باشند. همچنین موضوعات استنباطی مانند برآوردیابی بیزی پارامترها، برآوردیابی بر اساس انواع سانسورها، برآوردیابی به کمک روش‌های دیگر مانند روش کمترین مربعات قطری، پیش‌بینی مشاهده‌های آینده از این توزیع نیز می‌توانند مورد بررسی قرار گیرند.

### توضیحات

1. Exponentiated lindley poisson
2. Poisson Lindley
3. Gampertz Poisson
4. Exponentiated Lomax distribution

### مرجع‌ها

- [1] Aarset, M.V. (1987). How to identify bathtub hazard rate, *IEEE Transactions on Reliability*, **36**, 106–108.
- [2] Bakouch, H., Al-Zahrani, B., Al-Shomrani, A., Marchi, V. and Louzada, F. (2012). An extended lindley distribution, *Journal of the Korean Statistical Society*, **41**, 75–85.
- [3] Chahkandi, M. and Ganjali, M. (2009). On some lifetime distributions with decreasing failure rate, *Computational Statistics and Data Analysis*, **53**, 4433–4440.
- [4] Ghitany, M., Al-Mutairi, D., Balakrishnan, N. and Al-Enezi, L. (2013). Power lindley distribution and associated inference,

- Computational Statistics and Data Analysis, **64**, 20–33.
- [5] Ghitany, M., Al-Mutairi, D. and Nadarajah, S. (2008). Zero-truncated poisson-lindley distribution and its application, *Mathematics and Computers in Simulation*, **79**, 279–287.
- [6] Ghitany, M., Atieh, B. and Nadarajah, S. (2008). Lindley distribution and its application, *Mathematics and Computers in Simulation*, **78**, 493–506.
- [7] Kus, C. (2007). A new lifetime distribution, *Computational Statistics and Data Analysis*, **51**, 4497–4509.
- [8] Lehmann, E.L. and Casella, G. (1998). *Theory of Point Estimation*, Second Edition, Springer-Verlag, New York.
- [9] Lindley, D. (1958). Fiducial distributions and Bayes theorem, *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, **20**, 102–107.
- [10] Mahmoudi, E. and Zakerzadeh, H. (2010). Generalized poisson-lindley distribution, *Communications in Statistics Theory and Methods*, **39**, 1785–1798.
- [11] Nadarajah, S., Bakouch, H.S. and Tahmasbi, R. (2011). A generalized lindley distribution, *Sankhya B*, **73**, 331–359.
- [12] R Core Team (2017). *R: A Language and Environment for Statistical Computing*, R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria.
- [13] Sankaran, M. (1970). The discrete poisson-lindley distribution, *Biometrics*, **26**, 145–149.
- [14] Shanker, R., Sharma, S. and Shanker, R. (2013). A two-parameter lindley distribution for modeling waiting and survival times data, *Applied Mathematics*, **4**, 363–368.
- [15] Therneau, T.M. (2015). *Survival: A package for survival analysis in S, R package version 2.38*, URL: <https://cran.r-project.org/package=survival>.



- [16] Wenhao, G., Shangli, Z., Xinman, L. (2014). The Lindley-Poisson distribution in lifetime analysis and its properties, Journal of Mathematics and Statistics, **43**, 1063 – 1077.
- [17] Zakerzadeh, H. and Dolati, A. (2009). Generalized lindley distribution, Journal of Mathematical Extension, **3**, 13–25.

### پیوست A

داده‌های اول (الف): داده‌های مربوط به ۶۳ مقدار ثبت شده از مقاومت فایبرگلاس‌های ۱/۵ سانتی‌متری:

۰/۵۵, ۰/۹۳, ۱/۲۵, ۱/۳۶, ۱/۴۹, ۱/۵۲, ۱/۵۸, ۱/۶۱, ۱/۶۴, ۱/۶۸, ۱/۷۳, ۱/۸۱, ۲, ۰/۷۴,  
 ۱/۰۴, ۱/۲۷, ۱/۳۹, ۱/۴۹, ۱/۵۳, ۱/۵۹, ۱/۶۱, ۱/۶۶, ۱/۶۸, ۱/۷۶, ۱/۸۲, ۲/۰۱, ۰/۷۷, ۱/۱۱,  
 ۱/۲۸, ۱/۴۲, ۱/۵, ۱/۵۴, ۱/۶, ۱/۶۲, ۱/۶۶, ۱/۶۹, ۱/۷۶, ۱/۸۴, ۲/۲۴, ۰/۸۱, ۱/۱۳, ۱/۲۹,  
 ۱/۴۸, ۱/۵, ۱/۵۵, ۱/۶۱, ۱/۶۲, ۱/۶۶, ۱/۷, ۱/۷۷, ۱/۸۴, ۰/۸۴, ۱/۲۴, ۱/۳, ۱/۴۸, ۱/۵۱, ۱/۵۵,  
 ۱/۶۱, ۱/۶۳, ۱/۶۷, ۱/۷, ۱/۷۸, ۱/۸۹

داده‌های دوم (ب): داده‌های مربوط به زمان خرابی ۴۰ دستگاه توریو ماشین:

۱/۶, ۲, ۲/۶, ۳, ۳/۵, ۳/۹, ۴/۵, ۴/۶, ۴/۸, ۵, ۵/۱, ۵/۳, ۵/۴, ۵/۶, ۵/۸, ۶, ۶, ۶/۱, ۶/۳, ۶/۵,  
 ۶/۵, ۶/۷, ۷, ۷/۱, ۷/۳, ۷/۳, ۷/۷, ۷/۷, ۷/۸, ۷/۹, ۸, ۸/۱, ۸/۳, ۸/۴, ۸/۴, ۸/۵, ۸/۷, ۸/۸,  
 ۹

آنیتا عبدالهی نانوایشه

دانشجوی دکتری دانشگاه رازی

کرمانشاه، دانشگاه رازی، دانشکده علوم ریاضی، گروه آمار.

رایانشانی: anita.abdollahi@yahoo.com