

## کاربردی از اندازه‌گیری میزان چولگی ناهمواری درآمد بر اساس منحنی لورنتس و توزیع درآمد

زهرا بهدانی<sup>†</sup> و غلامرضا محتشمی برزادران<sup>‡\*</sup>

<sup>†</sup> دانشگاه صنعتی خاتم‌الانبیا (ص) بهبهان

<sup>‡</sup> دانشگاه فردوسی مشهد

چکیده: یکی از مهم‌ترین شاخص‌ها برای اندازه‌گیری ناهمواری درآمد ضریب جینی است. این شاخص چگونگی توزیع درآمد و میزان کلی ناهمواری‌های درآمد را به‌صورت مختصر نشان می‌دهد. اما اطلاعات کمی در مورد تقسیم درآمد بین طبقات مختلف درآمدی و شکل منحنی لورنتس به ما می‌دهد، برای مثال هنگامی که دو منحنی لورنتس نامتقارن متفاوت دارای ضریب جینی یکسان باشند، با استفاده از شاخص جینی به تنهایی روشن نیست که افزایش ناهمواری درآمد ناشی از ثروتمندتر شدن ثروتمندان، یا فقیرتر شدن فقرا است. لذا با این شاخص نمی‌توان تمام تغییرات تمرکز درآمد را مشخصه‌سازی نمود. برای رفع این مشکل روش‌ها و شاخص‌هایی وجود دارد. در این مقاله ابتدا دیدگاه چند نفر از محققین برای رفع این مشکل با کاربرد چولگی منحنی لورنتس مطرح شده و سپس یک ضریب چولگی به‌عنوان بهترین معرف تغییرات در نقاط انتهایی درآمدها معرفی شده است و به‌عنوان یک مثال کاربردی، توزیع درآمد استان‌های کشور در سال ۱۳۸۷ با تأکید دو استان خوزستان و هرمزگان که دارای ضریب جینی یکسان هستند مورد بررسی قرار گرفته است.<sup>۱</sup>

واژگان کلیدی: منحنی لورنتس؛ توزیع درآمد؛ ضریب جینی؛ شاخص نابرابری؛ تابع درآمد.

\* نویسنده‌ی عهده‌دار مکاتبات

دریافت: ۱۳۹۱/۱۱/۳، پذیرش: ۱۳۹۲/۹/۴.

## ۱- مقدمه

یکی از مهم‌ترین نشانه‌های رشد اجتماعی و وضعیت رفاه در یک جامعه، تعادل و توازن درآمد یا ثروت در آن جامعه است. منحنی لورنتس و ضریب جینی یک واحد اندازه‌گیری پراکندگی آماری است که معمولاً برای سنجش میزان نابرابری در توزیع درآمد یا ثروت در یک جامعه‌ی آماری استفاده می‌شود. این شاخص چگونگی توزیع درآمد و میزان کلی ناهمواری‌های درآمد را به صورت مختصر نشان می‌دهد اما اطلاعات کمی در مورد تقسیم درآمد بین طبقات مختلف درآمدی و شکل منحنی لورنتس به ما می‌دهد. برای مثال هنگامی که دو منحنی لورنتس نامتقارن متفاوت دارای ضریب جینی یکسان باشند. با استفاده از شاخص جینی به تنهایی روشن نیست که افزایش ناهمواری درآمد ناشی از ثروتمندتر شدن ثروتمندان، یا فقیرتر شدن فقرا است. لذا با این شاخص نمی‌توان همه‌ی تغییرات تمرکز درآمد را مشخصه‌سازی نمود. برای رفع این مشکل روش‌ها و شاخص‌هایی وجود دارد. یک دیدگاه برای رفع مشکل استفاده از شکل هندسی منحنی لورنتس و مقایسه‌ی آن‌ها می‌باشد. در بسیاری از موارد مطالعه‌ی شکل هندسی منحنی‌های لورنتس برای مثال تقارن منحنی نسبت به قطر فرعی از جمله نکات مهم است. عدم تقارن منحنی لورنتس توسط چندین آماردان ایتالیایی مانند جینی [۶]، کاکوانی [۸]، زاناردی [۱۵] و [۱۶] و ... مطالعه شده است.

## ۲- منحنی لورنتس

منحنی لورنتس از شاخص‌های مهم وضعیت «توزیع ثروت» در جامعه می‌باشد. بسیاری از کارشناسان آن را شاخص مهمی برای نمایش نابرابری‌های اجتماعی به صورت کلی نیز می‌دانند. ارتباط این دو مفهوم یعنی «نابرابری توزیع ثروت» و «نابرابری‌های اجتماعی» در جوامعی که دارای اقتصاد آزاد می‌باشند آشکارتر است. این شاخص اولین بار توسط ماکس اوتو لورنتس معرفی شد و از آن پس در زمینه‌های متنوع مورد مطالعه و بررسی قرار گرفت [۱۱].

تعریف ۱: اگر  $F(x) = \int_0^x f(y)dy$  تابع توزیع تجمعی متغیر تصادفی  $X$  و برای  $F^{-1}(u) = \sup \{x: F(x) \leq u\}$ ،  $u \in [0, 1]$  تابع چنبدکی آن باشد، تابع لورنتس برای متغیرهای تصادفی نامنفی با اولین گشتاور متناهی، به صورت زیر است:

..... مجله‌ی بررسی‌های آمار رسمی ایران، سال ۲۳، شماره‌ی ۲، پاییز و زمستان ۱۳۹۱، صص ۲۲۵-۲۴۲ .....

$$(۱) \quad L(u) = \frac{1}{E(X)} \int_0^u F^{-1}(t) dt, \quad u \in [0, 1].$$

است که در آن  $E(X) = \int_0^\infty yf(y)dy$  می‌باشد. با جایگذاری  $u = F(x)$  در رابطه‌ی (۱) رابطه‌ی (۲) نتیجه می‌شود.

$$(۲) \quad \{(u, L(u))\} = \{(u, L(u)) | u = F(x), L(u) = F_{\setminus}(x); \quad x \geq 0\}$$

که  $F_k(x) = \frac{1}{E(X^k)} \int_0^{F(x)} t^k f(t) dt$  توزیع‌های گشتاوری و  $E(X^k) < \infty$   $k = 0, 1, \dots$  است. نتایج زیر از مهم‌ترین مشخصه‌های منحنی لورنتس متغیرهای تصادفی پیوسته به‌طور مستقیم از رابطه‌ی (۱) نتیجه می‌شود [۷]:

۱. تابع لورنتس  $L$ ، تابعی صعودی، محدب و پیوسته با  $L(0) = 0$  و  $L(1) = 1$  است.

۲. به ازای هر  $0 < u < 1$  همواره  $L(u) < u$

$$F(\mu) - L(\mu) = \sup_x [F(x) - L(x)], \quad x = F^{-1}(\mu) \quad ۳.$$

$$L'(x) = \frac{x}{\mu} \quad ۴.$$

۵. میانگین نسبی انحراف از میانگین برابر است با

$$M(\mu) = \frac{E(|X-\mu|)}{2\mu} = F(\mu) - L(\mu)$$

۶. میانگین نسبی انحراف از میانه برابر است با

$$M(m) = \frac{E(|X-m|)}{2m} = F(m) - L(m)$$

که  $F$  و  $L$  و  $\mu$  و  $m$  به ترتیب تابع توزیع تجمعی، منحنی لورنتس و میانگین و میانه‌ی درآمد می‌باشند.

### ۳- ضریب جینی

ضریب جینی اولین بار توسط کورادو جینی به‌صورت دو برابر ناحیه‌ی بین منحنی لورنتس و خط قطر معرفی شد [۵]. این ضریب با نسبتی تعریف می‌شود که ارزشی بین صفر و یک دارد. هر چقدر ضریب جینی نزدیک به عدد صفر باشد، برابری بیش‌تر در توزیع درآمد را نشان می‌دهد و بالعکس هر چقدر ضریب جینی نزدیک به عدد یک باشد، توزیع نابرابر درآمد را مشخص می‌کند. اگر ضریب جینی مساوی با عدد صفر باشد یعنی همه درآمد و

ثروت یکسان دارند (برابری مطلق) و اگر مساوی با عدد یک باشد یعنی نابرابری مطلق به‌گونه‌ای که ثروت تنها در دست یک نفر است و مابقی هیچ درامدی ندارند [۱].  
تعریف ۲: اگر متغیر تصادفی  $X$  دارای تابع لورنتس  $L(u)$  باشد ضریب جینی آن با رابطه‌ی (۳) تعریف می‌شود:

$$(۳) \quad G = ۲ \int_0^1 [u - L(u)] du = ۱ - ۲ \int_0^1 L(u) du.$$

از مزایای ضریب جینی این است که این ضریب را می‌توان برای مقایسه‌ی توزیع درامدی در بخش‌های مختلف جامعه و همچنین در کشورها مورد استفاده قرار داد. برای مثال ضریب جینی برای مناطق شهری با مناطق روستایی در بسیاری از کشورها متفاوت است، ضریب جینی را به راحتی می‌توان با سراسر کشور مقایسه کرد و تفسیر آن نیز آسان است. از طرفی از ضریب جینی می‌توان برای نشان دادن چگونگی توزیع درآمد در داخل کشور در طی یک دوره از زمان استفاده کرد. در نتیجه این امکان وجود دارد تا ببینید که آیا نابرابری در حال افزایش است یا کاهش؟

از طرفی این ضریب دارای معایبی نیز می‌باشد مثلاً ضریب جینی نابرابری درآمد را اندازه‌گیری می‌کند اما نابرابری‌های فرصت را اندازه‌گیری نمی‌کند. اگر دو کشور ضریب جینی یکسان داشته باشند ممکن است یک کشور ثروتمند باشد و دیگری فقیر، می‌توان نتیجه گرفت اندازه‌گیری ضریب جینی در دو کشور متفاوت است. ضریب جینی نقطه‌ی برآورد در یک زمان خاص است. از این رو تغییرات درامدی را در طول زمان نادیده می‌گیرد.

#### ۴- ضریب چولگی منحنی لورنتس

همان طوری که ذکر شد ضریب جینی، کل اطلاعات مربوط به منحنی لورنتس و نابرابری‌های درآمد را در بر ندارد. با توجه به تعریف ضریب جینی ممکن است دو منحنی لورنتس متفاوت دارای ضریب جینی یکسان باشند. این تفاوت را می‌توان به وسیله‌ی ضریب تقارن منحنی لورنتس حول قطر فرعی اندازه‌گیری و محاسبه کرد [۳]. عدم تقارن منحنی لورنتس توسط چندین آماردان ایتالیایی مانند جینی [۶]، زاناردی [۱۵ و ۱۶]، کاکوانی [۸] و ... مطالعه شده است. در بسیاری از موارد مطالعه‌ی شکل هندسی

منحنی‌های لورنتس برای مثال تقارن منحنی نسبت به قطر فرعی از جمله نکات مهم می‌باشد. به ویژه موقعیت نقاطی از منحنی که خط مماس بر منحنی در آن نقاط دارای شیب یک است (نقاطی که خط مماس بر آن‌ها موازی خط تعادل است).

با استفاده از ویژگی شماره ۴ منحنی لورنتس که در بخش ۳ ذکر شد مشخص است که خط مماس بر منحنی لورنتس در نقطه‌ی  $u = F(\mu)$  موازی با خط تعادل (خط برابری کامل یا  $x = y$ ) است. با استفاده از این لم اگر ضریب تقارن منحنی لورنتس را به شکل  $S = F(\mu) + L(\mu)$  تعریف کنیم، منحنی لورنتس متقارن است اگر و فقط اگر  $S = 1$ ، اگر  $S > 1$  آن‌گاه نقاطی از منحنی لورنتس که خط مماس بر آن موازی با خط تعادل است در بالای محور تقارن قرار می‌گیرند و اگر  $S < 1$  آن‌گاه نقاطی که خط مماس بر آن موازی با خط تعادل است در زیر محور تقارن قرار می‌گیرند. برای مثال منحنی لورنتس توزیع پارتو دارای ضریب تقارن کم‌تر از یک و منحنی لورنتس توزیع لگ نرمال متقارن است [۴].

کاکوانی ثابت کرد که اگر  $L(\mu) = 1 - \mu$  یا به‌طور متناظر  $L'(\mu) = -1$ ، آن‌گاه منحنی لورنتس متقارن است [۸] که با ویژگی ۴ منحنی لورنتس هم‌ارز است و با توجه به شکل ۱ می‌توان آن را به این صورت توجیه کرد. منحنی لورنتس را متقارن گوئیم هرگاه به ازای هر  $B$  و  $C$  روی قطر فرعی اگر  $AC = AB$  محل تقاطع دو قطر یعنی نقطه‌ی  $(\frac{1}{\mu}, \frac{1}{\mu})$  است) آن‌گاه  $BB' = CC'$  که  $B'$  و  $C'$  نقاطی از منحنی لورنتس در نظر گرفته می‌شود که به ترتیب نقاط  $B$  و  $C$  پای عمود این نقاط بر خط قطر اصلی باشند.

منحنی لورنتس چوله به سمت صفر است اگر  $BB' > CC'$  یا  $L(\mu) > 1 - \mu$  و منحنی لورنتس چوله به سمت یک است اگر  $BB' < CC'$  یا  $L(\mu) < 1 - \mu$ .

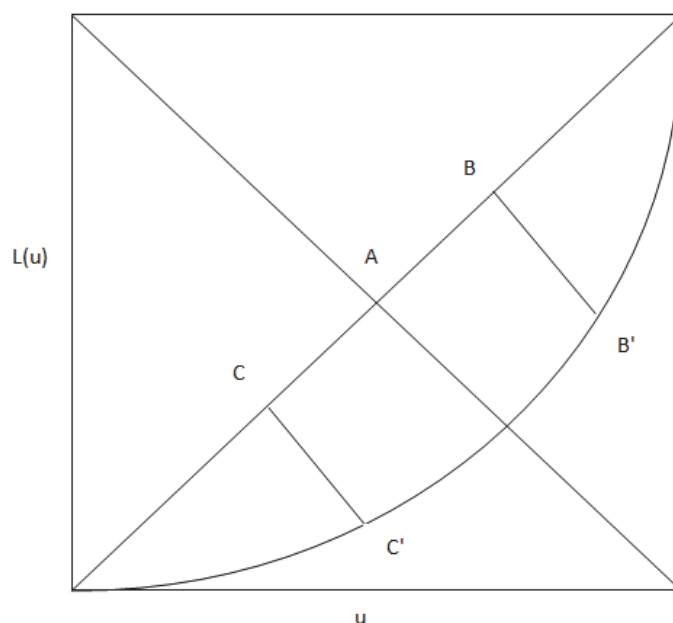
کاکوانی و پودر برای بررسی عدم تقارن منحنی لورنتس از رابطه‌ی (۲) استفاده کردند [۹]. اگر  $P$  نقطه‌ای روی منحنی لورنتس با مختصات  $(F, F_1)$  (شکل ۲) باشد و داشته باشیم:

$$(۴) \quad \eta = \frac{1}{\sqrt{2}}(F - F_1), \quad \pi = \frac{1}{\sqrt{2}}(F + F_1)$$

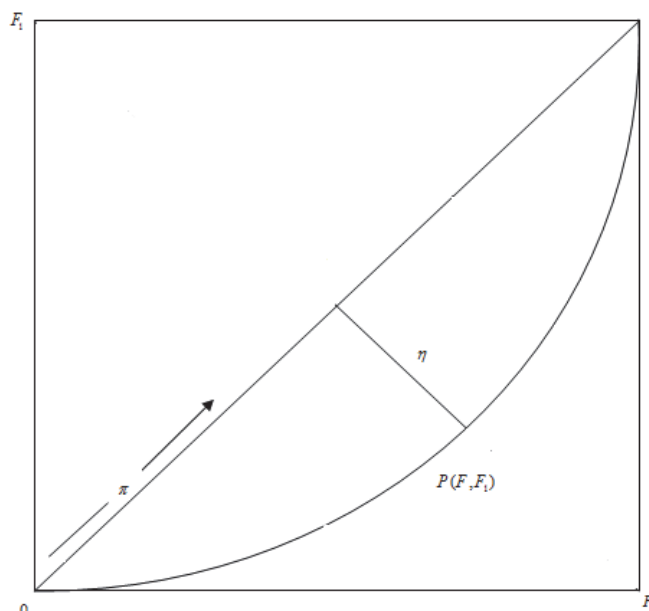
که  $\eta$  فاصله‌ی نقطه‌ی  $P$  تا خط قطر،  $\pi$  فاصله‌ی نقطه‌ی صفر تا پای عمود نقطه‌ی  $P$  بر خط قطر،  $0 \leq \eta \leq \pi$  و  $0 \leq \pi \leq \sqrt{2}$  است. منحنی لورنتس بر حسب  $\eta$  و  $\pi$  برابر  $\eta = f(\pi)$  است. اگر  $g(X)$  پیوسته باشد و مشتق‌های  $F(x)$  و  $F_1(x)$  موجود باشند و  $dF/dx = g(x)$  و  $dF_1/dx = xg(x)/\mu$  باشد با استفاده از

$$\frac{d^2\eta}{d\pi^2} = -\frac{\sqrt{2}\mu^2}{g(x)(\mu+x)^2} \text{ و } \frac{d\eta}{d\pi} = \frac{\mu-x}{\mu+x} \text{ برابر } \pi \text{ نسبت به } \pi \text{ مشتق } \eta \text{ نسبت به } \pi \text{ برابر}$$

بنابراین  $\eta$  ماکزیمم مقدار خود را در نقطه  $x = \mu$  اختیار می‌کند.



شکل ۱- منحنی لورنتس و تقارن آن با استفاده از تعریف کاکوانی [۸]



شکل ۲- کاکوانی و پودر و تقارن منحنی لورنتس [۹]

اگر منحنی لورنتس متقارن باشد مقدار  $\eta P(F, F_1)$  در  $\pi$  و  $(\sqrt{2} - \pi)$  به‌ازای هم‌ی مقادیر  $\pi$  برابر است. منحنی، چوله به سمت یک است اگر  $f(\pi) > f(\sqrt{2} - \pi)$  و  $\pi < \frac{1}{\sqrt{2}}$  و اگر  $f(\pi) < f(\sqrt{2} - \pi)$  و  $\pi < \frac{1}{\sqrt{2}}$  منحنی چوله به سمت صفر خواهد بود. برای مثال برای توزیع بتا با توزیع

$$B(x, \alpha, \beta) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} \int_0^x t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt, \quad 0 \leq x \leq 1, \alpha, \beta > 0$$

که  $B(\cdot, \cdot)$  تابع بتا است. منحنی لورنتس این توزیع به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$L(u) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} \int_0^u t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt \quad \alpha \neq 1, \quad 0 < \beta \leq 1$$

محاسبه می‌شود و ضریب جینی آن برابر است با  $G = -\frac{2\alpha}{\alpha+\beta} - 1 = -\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}$  که

$\eta = c\pi^\alpha(\sqrt{2} - \pi)^\beta$ ,  $c, \alpha, \beta > 0$  وجود محدودیت روی  $c$  برای وجود منحنی لورنتس لازم است [۱۴]. این منحنی متقارن است اگر  $\alpha = \beta$ ، چوله به سمت یک است اگر  $\alpha < \beta$  و در غیر اینصورت چوله به سمت صفر خواهد بود.

در این مقاله در راستای مقاله‌ی [۷] اندازه‌ی جدیدی از پراکندگی ارایه می‌شود که جزئیات نقاط انتهایی درآمد را بهتر بازگو می‌کند. این اندازه بر اساس توزیع‌های درآمد و منحنی لورنتس آن‌ها معرفی شده است. در حقیقت اگر این دو متقارن باشند هیچ شکافی در درآمد و توده‌ی مرکزی جمعیت وجود ندارد. در این صورت  $M(m) = M(\mu) = 0$  و  $(F(\mu), L(\mu)) = (F(m), L(m)) = (\frac{1}{\pi}, \frac{1}{\pi})$  است. اگر هر یک از این دو یعنی توزیع درآمد یا منحنی لورنتس از تقارن فاصله بگیرد آن‌گاه شکاف درآمدی افزایش می‌یابد و  $M(m) < M(\mu)$ ، توده‌ی جمعیت مرکزی منحنی لورنتس نیز از نقطه‌ی میانی خط تساوی فاصله می‌گیرد که به صورت تحدب منحنی لورنتس بیان می‌شود [۲]. این ارتباط بین نسبت‌های تقارن و شکاف درآمدی است که موجب ساختن اندازه ناهم‌واری درآمد می‌شود اما برای تعریف این شاخص نیاز به تعریف نقاطی برای کنترل شکل منحنی لورنتس و توزیع‌های درآمد داریم. این نقاط کنترل‌کننده را می‌توان بر اساس آماره‌های مشاهده‌شده یا پارامترهای توزیع درآمد مانند میانگین و میانه تعریف کرد. با توجه به ویژگی‌های منحنی لورنتس می‌توانیم توده‌ی مرکزی منحنی لورنتس را بر اساس چهار نقطه‌ی کنترلی،  $P_0 = (0, 0)$ ،  $P_1 = (F(m), L(m))$ ،  $P_2 = (F(\mu), L(\mu))$ ،  $P_3 = (1, 1)$  بیابیم و یک اندازه‌ی جدید برای اندازه‌گیری نابرابری درآمد با استفاده از توده‌ی مرکزی و ضریب چولگی منحنی لورنتس تعریف کنیم [۷].

برای تعریف شاخص جدید نقاط کنترلی معلوم  $P_0, \dots, P_n$  و  $t \in [0, 1]$  را می‌توان در رابطه‌ی بازگشتی زیر قرار داد:

$$(5) \quad \begin{cases} P_{0,j}(t) = P_j & j = 0, \dots, n-1 \\ P_{i,j}(t) = (1-t)P_{i-1,j}(t) + tP_{i-1,j+1}(t) & i = 1, \dots, n \end{cases}$$



با جایگذاری چهار نقطه‌ی

$$P_0 = (0, 0), P_1 = (F(m), L(m)), P_2 = (F(\mu), L(\mu)), P_3 = (1, 1)$$

و  $t = \frac{1}{4}$  داریم:

$$P_{1,j} \left( \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{4} P_j + \frac{3}{4} P_{j+1} \quad j = 0, 1, 2, 3$$

که توده‌های مرکزی خطوط ارتباطی نقاط  $P_j$  و  $P_{j+1}$  می‌باشند. برای مثال

$$P_{1,0} \left( \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{4} P_0 + \frac{3}{4} P_1$$

رابطه‌ی بازگشتی (۵) توده‌ی مرکزی منحنی لورنتس به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\text{توده‌ی مرکزی} = \left( \frac{1}{4} \right)^3 (P_0 + 3P_1 + 3P_2 + P_3)$$

$$= \frac{1}{8} ((0, 0) + 3(F(m), L(m)) + 3(F(\mu), L(\mu)) + (1, 1))$$

بنابراین مختصات توده‌ی مرکزی  $F_b = \frac{1}{8} (3F(m) + 3F(\mu) + 1)$  و

$$L_b = \frac{1}{8} (3L(m) + 3L(\mu) + 1) \text{ هستند.}$$

روشن است که  $F_b - L_b = \frac{3}{8} (M(m) + M(\mu))$  شکاف درآمد در توده‌ی مرکزی

منحنی لورنتس است. در نهایت اندازه‌ی نابرابری درآمد  $\psi$  به صورت (۶) تعریف شده است:

$$(6) \quad \psi = k(F_b - L_b) = \frac{3}{8\sqrt{2}} [(M(m) + M(\mu)(F(\mu) + L(\mu)))]$$

که  $k = \frac{F(\mu) + L(\mu)}{\sqrt{2}} = \frac{S}{\sqrt{2}}$  ضریب چولگی منحنی لورنتس است. شاخص  $\psi$  تابعی از

میانگین نسبی انحرافات از میانگین و میانه و ضریب چولگی منحنی لورنتس می‌باشد.

لذا این شاخص علاوه بر این که یک اندازه‌ی نابرابری است معیاری برای ارزیابی تغییرات

مقادیر نهایی درآمدها نیز می‌باشد.

قضیه‌ی ۰۱. اگر  $\psi$  اندازه‌ی ناهمواری درآمد توضیح داده شده در رابطه‌ی (۶) باشد آن‌گاه:

$$0 \leq \psi \leq \frac{\sqrt[3]{2}}{8}.$$

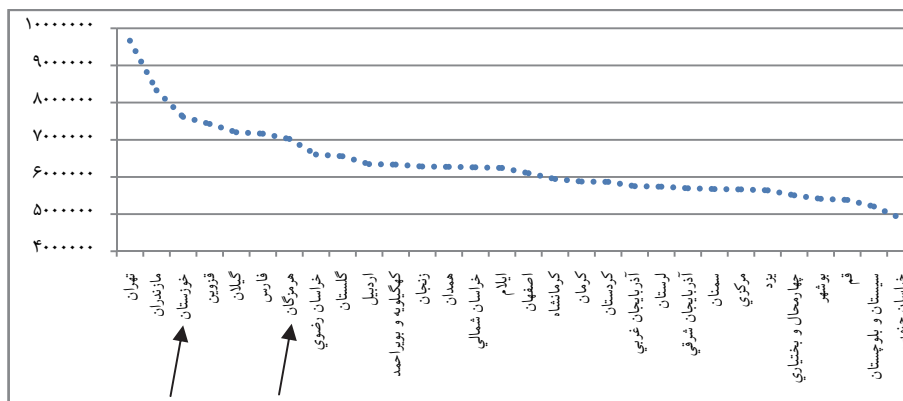
اثبات. بدیهی است که صفر یک کران پایین برای  $\psi$  است. برای این که نشان دهیم  $\psi$  کمتر یا مساوی  $\frac{\sqrt[3]{2}}{8}$  داریم:

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{\sqrt[3]{(M(m) + M(\mu))(F(\mu) + L(\mu))}}{\sqrt[8]{2}} \leq \frac{\sqrt[3]{(2M(\mu))(F(\mu) + L(\mu))}}{\sqrt[8]{2}} \\ &= \frac{\sqrt[3]{2}}{8} (F(\mu) - L(\mu))(F(\mu) + L(\mu)) \leq \frac{\sqrt[3]{2}}{8} (F(\mu))^2 \leq \frac{\sqrt[3]{2}}{8}. \end{aligned}$$

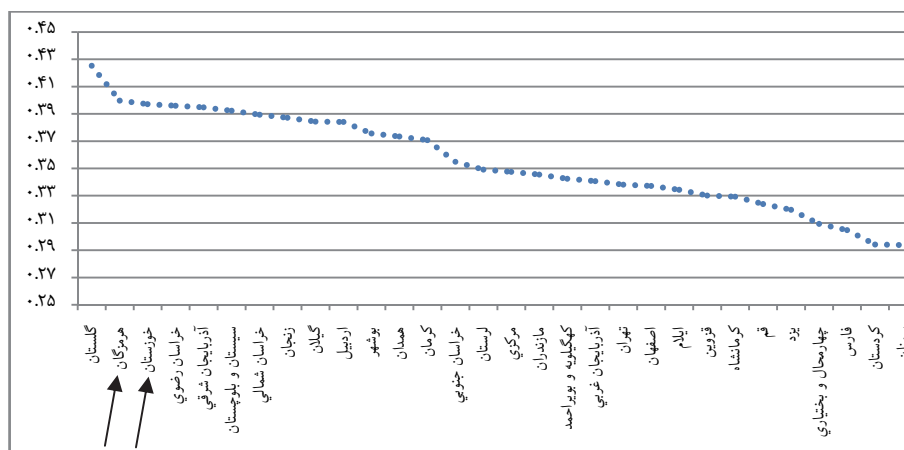
## ۵- مثال کاربردی

در این بخش با آرایه‌ی یک مثال به دنبال روشن شدن مفاهیم آرایه‌شده می‌باشیم برای این منظور مجموعه داده‌های درآمد شهری استان‌های کشور در سال ۸۷ را با هم مقایسه می‌کنیم. داده‌های مورد استفاده از طرح آمارگیری از هزینه و درآمد خانوارهای شهری در سال ۸۷ استخراج شده است. منظور از درآمد، درآمد خالص پولی و غیر پولی همه‌ی بخش‌های خصوصی و غیر خصوصی و درآمدهای متفرقه‌ی ماهیانه‌ی خانوار و بر حسب ریال می‌باشد. جدول ۱ برخی از شاخص‌های آماری، مانند میانگین، ضریب جینی و ضریب چولگی درآمد خانوار شهری استان‌های کشور را آرایه می‌دهد. با توجه به اطلاعات جدول استان‌های گیلان، خوزستان، خراسان رضوی، لرستان، هرمزگان، تهران، قم اردبیل و گلستان دارای ضریب تقارن بزرگ‌تر از یک می‌باشند به عبارتی در این استان‌ها ناهمواری درآمد بیشتر مربوط به تعداد کمی از توانمندترین افراد جامعه می‌باشد. به بیان دیگر عده‌ی زیادی از افراد جامعه دارای درآمد ناچیز هستند در حالی که افراد کمی از جامعه بخش بزرگی از ثروت جامعه را دارا می‌باشند. در مقابل استان‌های بوشهر، همدان، کردستان، اصفهان، سیستان و بلوچستان و آذربایجان شرقی دارای ضریب تقارن کوچک‌تر از یک هستند. در این استان‌ها اکثریت جامعه دارای درآمدی بالا می‌باشند و عده‌ی محدودی از جامعه دارای درآمد پایین می‌باشند. استان‌هایی چون مازندران، آذربایجان غربی، ایلام، کهگیلویه و بویراحمد و خراسان شمالی دارای منحنی لورنتس

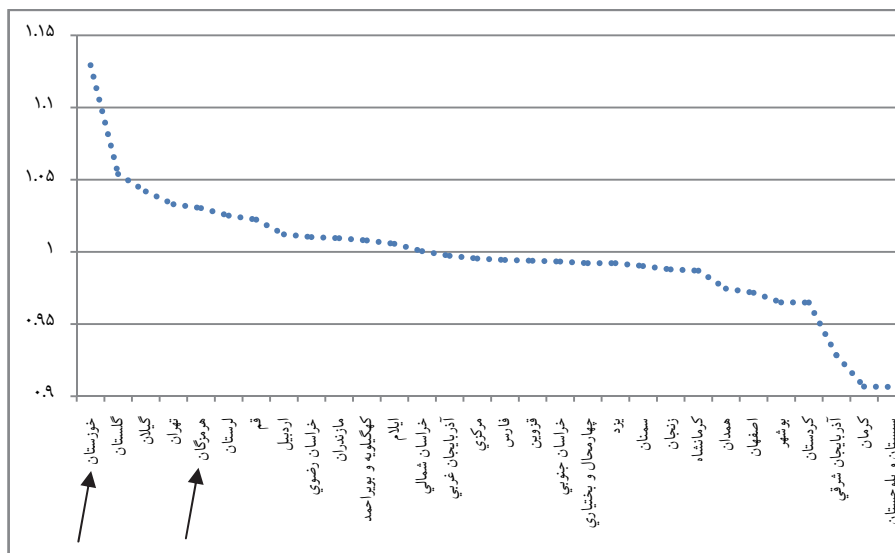
مقارن می‌باشند. نمودارهای ۳-۶ اطلاعات جدول ۱ را به صورت صعودی نمایش می‌دهد. با توجه به نمودارها واضح است که استان‌های تهران، مازندران و خوزستان ۳ استان با بیش‌ترین درآمد و استان‌های قم، سیستان و بلوچستان و خراسان جنوبی دارای کم‌ترین درآمد می‌باشند. از طرفی استان‌های گلستان، هرمزگان و خوزستان دارای بیش‌ترین نابرابری و استان‌های فارس، کردستان و سمنان دارای کم‌ترین نابرابری می‌باشند. می‌توان گفت ضریب  $\mathcal{V}$  ترکیبی از ضریب تقارن  $S$  و ضریب جینی است. برای مثال شکل ۷ دو منحنی لورنتس متقاطع با ضریب جینی یکسان  $0/4$  برآش داده به داده‌های درآمد استان‌های خوزستان و هرمزگان در سال ۸۷ را نشان می‌دهد. ضریب تقارن  $\mathcal{V}$  و برای دو استان محاسبه شده‌اند. منحنی لورنتس استان خوزستان نامتقارن با  $S = 1/13$  و منحنی لورنتس استان هرمزگان مقارن و  $S = 1$  می‌باشد. همان‌طور که از اطلاعات جدول ۲ مشخص است متوسط درآمد ماهیانه‌ی خانوار در استان خوزستان تقریباً نه میلیون تومان است که نسبت به استان هرمزگان تقریباً یک میلیون تومان بیش‌تر است. از طرفی مقایسه‌ی ضریب چولگی توزیع برای دو استان بیانگر عدم تقارن بیش‌تر در داده‌های درآمد استان خوزستان می‌باشد. جدول ۳ چگونگی توزیع درآمد بین صدک‌های جمعیتی را نشان می‌دهد. با توجه به جدول صدک‌های پایین جمعیتی استان هرمزگان دارای درآمد بالاتری نسبت به استان خوزستان می‌باشند، به طوری که این روند تا دهک هشتم جمعیتی ادامه می‌یابد. در این دهک تقریباً درآمدها یکسان است و از این پس درآمد صدک‌های جمعیتی استان خوزستان نسبت به استان هرمزگان افزایش می‌یابد که دلیل روشنی بر افزایش ضریب  $\mathcal{V}$  در استان خوزستان می‌باشد. به عبارتی می‌توان گفت ناهمواری درآمد در استان خوزستان بیانگر ثروتمندتر شدن ثروتمندان است.



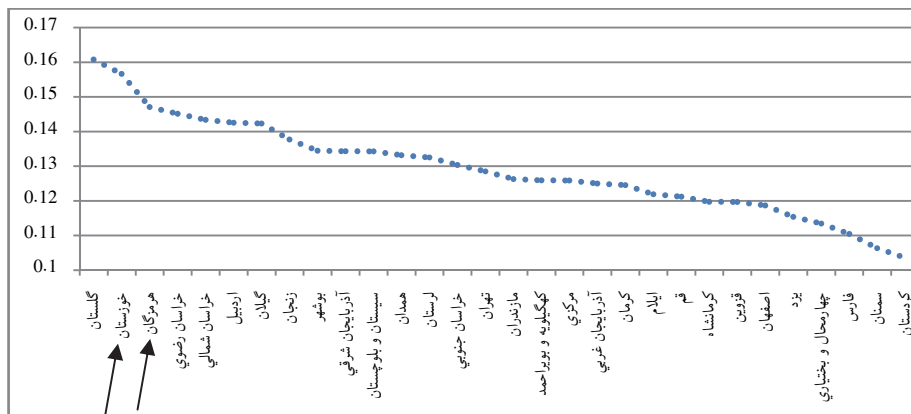
شکل ۳- متوسط درآمد ماهیانه‌ی خانوار شهری استان‌های کشور در سال ۸۷



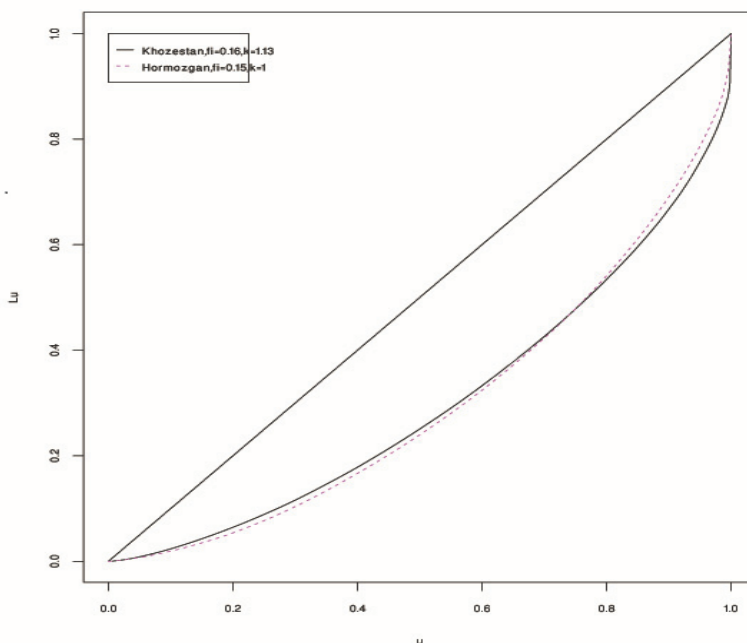
شکل ۴- ضریب جینی داده‌های درآمد ماهیانه‌ی خانوار شهری استان‌های کشور در سال ۸۷



شکل ۵- ضریب تقارن داده‌های درآمد ماهیانه‌ی خانوار شهری استان‌های کشور در سال ۸۷



شکل ۶- ضریب تقارن داده‌های درآمد ماهیانه‌ی خانوار شهری استان‌های کشور در سال ۸۷



شکل ۷- منحنی لورنتس داده‌های درآمد استان‌های خوزستان (شکل ممتد) و هرمزگان (نقطه‌چین) در سال ۸۷

## ۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله برای رفع نقص‌های ضریب جینی و منحنی لورنتس، تقارن منحنی لورنتس را از دیدگاه‌های مختلف بررسی کردیم. این دیدگاه‌ها گرچه با روابط متفاوتی آرایه شده بودند ولی کلیت تفسیر آن‌ها از تقارن یکسان می‌باشد. سپس در راستای [۷] ضریبی از تقارن منحنی لورنتس را به‌عنوان یک شاخص همراه ضریب جینی معرفی کردیم این شاخص برای نشان دادن چگونگی توزیع ثروت به کمک ضریب جینی می‌آید و نقص موجود در ضریب جینی را با آرایه‌ی تغییرات مقادیر نهایی درآمدها رفع می‌کند. برای روشن شدن مفاهیم آرایه‌شده در این مقاله داده‌های درآمد ماهیانه‌ی خانوار استان‌های خوزستان و هرمزگان در سال ۱۳۸۷ که دارای ضریب جینی یکسان می‌باشند ولی دارای توزیع یکسان نیستند که در این مورد توزیع ثروت در استان هرمزگان متقارن و توزیع ثروت در استان

خوزستان نامتقارن است که مشخص شد بخش عمده‌ای از ثروت در این استان در دست اقلیت محدود می‌باشد.

جدول ۱- برخی از شاخصهای آماری برای داده‌های ماهیانه درآمد خانوار شهری استان‌های کشور در سال ۸۷ (واحد ریال)

استان	کد	میانگین	انحراف معیار	ضریب جینی	S	٪
مرکزی	۰۰	۵۶۶۳۲۶۲	۴۷۴۰۳۲۶	۰/۳۵	۰/۹۹	۰/۱۲
گیلان	۰۱	۷۲۰۳۱۸۷	۷۵۵۵۳۸۷	۰/۳۸	۱/۰۴	۰/۱۴
مازندران	۰۲	۸۳۳۳۳۳۳	۷۰۶۹۴۸۳	۰/۳۵	۱	۰/۱۳
آذربایجان شرقی	۰۳	۵۶۹۳۱۹۵	۴۹۸۸۵۵۹	۰/۳۹	۰/۹۳	۰/۱۳
آذربایجان غربی	۰۴	۵۷۴۸۰۵۴	۳۹۷۱۹۱۸	۰/۳۴	۱	۰/۱۲
کرمانشاه	۰۵	۵۹۴۵۳۳۹	۴۰۳۵۶۳۱	۰/۳۳	۰/۹۹	۰/۱۲
خوزستان	۰۵	۷۶۱۶۷۹۸	۱۶۵۸۳۳۳۳	۰/۴۰	۱/۱۳	۰/۱۶
فارس	۰۷	۷۱۶۴۷۴۱	۴۴۶۱۷۱۲	۰/۳۰	۰/۹۹	۰/۱۱
کرمان	۰۸	۵۸۷۵۲۰۷	۴۳۵۵۶۹۶	۰/۳۷	۰/۹۱	۰/۱۲
خراسان رضوی	۰۹	۶۶۰۱۲۹۷	۱۱۴۱۶۶۶۷	۰/۳۹	۱/۰۱	۰/۱۴
اصفهان	۱۰	۶۰۹۸۷۴۶	۴۹۱۳۰۱۴	۰/۳۴	۰/۹۷	۰/۱۲
سیستان و بلوچستان	۱۱	۵۲۰۳۹۰۷	۴۰۸۷۵۵۸	۰/۳۹	۰/۹۱	۰/۱۳
کردستان	۱۲	۵۸۶۸۲۹۶	۳۳۷۴۰۴۷	۰/۲۹	۰/۹۶	۰/۱۰
همدان	۱۳	۶۲۷۱۳۷۱	۵۶۷۰۲۶۳	۰/۳۷	۰/۹۷	۰/۱۳
چهارمحال و بختیاری	۱۴	۵۵۰۴۲۷۰	۳۳۵۳۵۴۰	۰/۳۱	۰/۹۹	۰/۱۱
لرستان	۱۵	۵۷۳۵۴۷۰	۴۲۸۰۷۵۰	۰/۳۵	۱/۰۲	۰/۱۳
ایلام	۱۶	۶۲۴۰۸۹۵	۴۷۹۱۷۴۰	۰/۳۳	۱	۰/۱۲
کهگیلویه و بویراحمد	۱۷	۶۳۳۲۴۳۷	۴۴۶۸۳۰۴	۰/۳۴	۱	۰/۱۳
بوشهر	۱۸	۵۴۰۸۵۶۰	۴۵۱۶۶۰۳	۰/۳۸	۰/۹۶	۰/۱۳
زنجان	۱۹	۶۲۸۱۵۴۲	۶۱۴۲۲۰۵	۰/۳۹	۰/۹۹	۰/۱۴
سمنان	۲۰	۵۶۷۱۳۵۳	۳۳۹۶۴۱۵	۰/۲۹	۰/۹۹	۰/۱۱

..... مجله‌ی بررسی‌های آمار رسمی ایران، سال ۲۳، شماره‌ی ۲، پاییز و زمستان ۱۳۹۱، صص ۲۲۵-۲۴۲.....

۰/۱۱	۰/۹۹	۰/۳۲	۳۹۸۷۳۳۷	۵۶۳۹۱۳۹	۲۱	یزد
۰/۱۵	۱/۰۳	۰/۴۰	۸۳۱۹۴۵۹	۷۰۲۲۶۳۱	۲۲	هرمزگان
۰/۱۳	۱/۰۳	۰/۳۴	۷۴۹۶۴۹۴	۹۶۶۶۶۶۷	۲۳	تهران
۰/۱۴	۱/۰۱	۰/۳۸	۵۵۵۵۴۸۴	۶۳۴۳۰۸۱	۲۴	اردبیل
۰/۱۲	۱/۰۲	۰/۳۲	۳۵۵۳۵۴۳	۵۳۸۱۰۲۰	۲۵	قم
۰/۱۲	۰/۹۹	۰/۳۳	۶۱۱۳۹۳۰	۷۴۲۸۳۷۲	۲۶	قزوین
۰/۱۶	۱/۰۵	۰/۴۳	۱۰۵۰۰۰۰۰	۶۵۵۷۶۷۱	۲۷	گلستان
۰/۱۴	۱	۰/۳۹	۵۸۸۸۷۷۵	۶۲۵۹۱۵۱	۲۸	خراسان شمالی
۰/۱۳	۰/۹۹	۰/۳۵	۳۹۷۸۱۰۳	۴۸۸۸۹۶۴	۲۹	خراسان جنوبی

جدول ۲- برخی از شاخص‌های آماری برای داده‌های درآمد ماهیانه‌ی خانوار استان‌های خوزستان و هرمزگان (واحد میلیون ریال)

شهرستان	میانگین	میانه	مد	ضریب چولگی	ضریب کشیدگی	ضریب جینی	S
هرمزگان	۸۴	۶۶	۳۰	۸/۳۹	۹۸/۳۳	۰/۴۰	۱
خوزستان	۹۱	۷۱	۲۴	۱۸/۹۵	۳۹۵/۴۰	۰/۴۰	۱/۱۳

جدول ۳- برخی از صدک‌های داده‌های درآمد ماهیانه‌ی خانوار استان‌های خوزستان و هرمزگان (واحد میلیون ریال)

استان	صدک ۱	صدک ۵	صدک ۱۰	صدک ۲۰	صدک ۳۰	صدک ۴۰	صدک ۵۰	صدک ۶۰	صدک ۷۰	صدک ۸۰	صدک ۹۰	صدک ۹۵	صدک ۹۹
هرمزگان	۱۱	۲۴	۴۲	۶۲	۸۰	۱۰۸	۱۸۹	۳۴۹	۴۲۷	۴۲۷	۴۲۷	۴۲۷	۴۲۷
خوزستان	۹	۱۶	۳۶	۵۸	۷۷	۱۱۲	۱۸۹	۳۴۹	۴۲۷	۴۲۷	۴۲۷	۴۲۷	۴۲۷



### توضیحات

۱. داده‌های مورد استفاده در این مقاله برای روشن شدن موضوع می‌باشد و در این مقاله بحث هیچ‌گونه تحلیلی در مورد داده‌های درآمد کشور نداریم. در آینده می‌توان داده‌های درآمد کشور طی سال‌های اخیر را به صورت تحلیلی بررسی کرد.
۲. یا به عبارتی دیگر منحنی لورنتس متقارن است اگر مماس بر منحنی در نقطه‌ی تقاطع با قطر فرعی مربع واحد، با قطر اصلی در محور مختصات موازی باشد و با توجه به این که محورهای تقارن به صورت  $F(y) + L(y) = 1$  بیان می‌شوند قابل اثبات است.

### مرجع‌ها

- [۱] بهدانی، زهرا؛ محتشمی برزادران، غلامرضا (۱۳۸۹). مشخصه‌هایی برای ترتیب‌های لورنتس در خانواده‌ی توزیع‌های درآمد. مجله بررسی‌های آمار رسمی ایران. ۲۱، ص ۱۶۷-۱۵۱.
- [2] Dagum, C. (1980). The generation and distribution of income, the Lorenz curve and the Gini ratio, *Economic Applique*, **33**, 327-367.
- [3] Damgaard, C. and Weiner, J. (2000). Describing Inequality in plant size or fecundity. *Ecology*, **81**, 1139-1142.
- [4] Gastwirth, J.L. (1972). The estimation of the Lorenz curve and Gini index, *The Review of Economics and Statistics*, **54**, 306-316.
- [5] Gini, C. (1912). Variabilita' e mutabilita, studio Economicogiuridici, universita di Cagliari Anno III, Parte 2a, reprinted in C. 211-382.
- [6] Gini, C. (1932), Intorno alle curve di concentrazione, *Metron*, **9**, 2-76.
- [7] Hassan, M.Y. (2008). An income inequality measure based on the symmetric properties of both the Income Distribution and the Lorenz curve, *Egyptian Statistical Journal*, **52**, 69-108.
- [8] Kakwani, N.C. (1980). *Income Inequality and Poverty. Methods of Estimation and Policy Applications*, Oxford University Press, Oxford.

- [9] Kakwani, N.C. and Podder, N. (1987). Efficient Estimation of the Lorenz curve and Associated Inequality Measures from Grouped Observations, *Econometrica*, **44**, 137-148.
- [10] Kleiber, C. (2005). The Lorenz curve in economics and econometrics. Invited paper, Gini-Lorenz Centennial conference, Siena.
- [11] Kleiber, C. and Kotz, S. (2003). *Statistical Size Distributions in Economics and Actuarial Sciences*, John Wiley.
- [12] Kleiber, C. and Kramer, W. (2003). Efficiency, equity, and generalized Lorenz dominance. *Statistica*, **55**, 173-186.
- [13] Lorenz, M.O, (1905). Method of measuring the concentration of wealth, *Journal of the American Statistical Association*, **9**. 209-219.
- [14] Teekens, R. (1987). Beta Lorenz curve, ISS Working Paper Series/General Series, **35**, 1-22.
- [15] Zanardi, G. (1964). Della asimmetria condizionata delle di concentrazione Lo scentrimento, *Rivista Italiana di Economia, Demografia Statistica*, **18**, 431-466.
- [16] Zanardi, G. (1965). L'asimmetria statistica delle curve di concentrazione, *Ricerche Econo*, **19**, 355-396.

زهرا بهدانی

کارشناس ارشد آمار

استان خوزستان، بهبهان، دانشگاه صنعتی خاتم‌الانبیا (ص) بهبهان، دانشکده‌ی علوم پایه، گروه آمار.

رایانشانی: behdani@bkatu.ac.ir

غلامرضا محتشمی برزاداران

دکتری آمار

استان خراسان رضوی، مشهد، دانشگاه فردوسی مشهد، گروه آمار.

رایانشانی: grmohtashami@um.ac.ir