

## طراحی اقتصادی مدل کنشی اپرچت

زینب لطیفی<sup>†\*</sup> و محمد با منی مقدم<sup>‡</sup>

<sup>†</sup> دانشگاه آزاد اسلامی واحد آبادان

<sup>‡</sup> دانشگاه علامه طباطبائی

**چکیده:** نمودارهای کنترل، ابزارهای مقدماتی کنترل آماری فرایند هستند که ممکن است با استفاده از روش‌های ساده مانند نمودار کنترل شوهارت یا معیارهای آماری دیگر یا با استفاده از معیارهای اقتصادی طراحی گردند. طراحی اقتصادی نمودارهای کنترل شامل تعیین اندازه‌ی نمونه ( $n$ )، فاصله‌ی زمانی بین نمونه‌ها ( $h$ ) و ضریب حدود کنترل ( $k$ ) است.

بیش‌تر مدل‌های طراحی شده برای نمودارهای کنترل، مدل‌هایی هستند که برای حفظ سطوح جاری کیفیت فرایند به کار می‌روند. وه‌با در سال ۱۹۹۶، یک مدل کنشی<sup>۱</sup> برای بهبود فرایند ارائه داد اما این مدل فقط، طراحی اقتصادی نمودارهای کنترل تک‌ی ( $\bar{X}$  یا  $S$ ) را در بر داشت. در صورتی که در عمل، دو نمودار برای پایش فرایند مورد استفاده قرار می‌گیرند، یکی برای پایش تغییرات ایجاد شده در میانگین فرایند؛ و دیگری برای پایش تغییرات ایجاد شده در پراکندگی فرایند. لذا، ابتدا مدل کنشی وه‌با و سپس تعمیم این مدل که توسط اپرچت در سال ۲۰۰۷ انجام شد را شرح می‌دهیم. مدل کنشی اپرچت به طراحی نمودارهای کنترلی می‌پردازد که برای پایش توأم میانگین و پراکندگی فرایند به کار می‌روند. در آخر نیز بهینه‌سازی مدل حاصل را بررسی می‌کنیم. بهینه‌سازی شامل یافتن پارامترهای طراحی نمودار کنترل بهینه‌ای است که هزینه‌ی خالص جاری (NPC)<sup>۲</sup> را در هر زمان مینیمم می‌کنند. این بهینه‌سازی و نیز کاربرد مدل کنشی اپرچت در قالب یک مثال نشان داده می‌شود.

واژگان کلیدی: بهبود فرایند؛ مدل کنشی؛ بهینه‌سازی.

---

دریافت: ۱۳۸۸/۸/۴، پذیرش: ۱۳۸۹/۳/۱۷

\* نویسنده‌ی عهده‌دار مکاتبات

## ۱- مقدمه

با افزایش روزافزون دانش بشری و رشد فناوری و وابستگی جامعه‌ی بشری به آن‌ها، مقوله‌ی کیفیت و اقتصاد این فناوری‌ها از جایگاه بسیار والایی برخوردار شده است. بنا بر این، تولید محصولاتی با کیفیت بالا و هزینه‌ی پایین به‌عنوان رمز حیات سازمان‌ها مطرح است و در نتیجه، احتیاج به رقابت در قیمت و کیفیت باعث شده است تا بسیاری از سازمان‌های آگاه از وضعیت رقابت، بیش‌تر تمرکز خود را به بهینه‌سازی سامانه‌ها (محصولات و یا فرایندها) معطوف نمایند. در این ارتباط، چون اغلب این سامانه‌ها تأثیرپذیر از عوامل تصادفی و یا اغتشاش هستند و تغییرپذیری جزء ماهیت عملکردی آن‌ها به شمار می‌آید، کنترل کیفیت آماری به معنای کاربرد اصول و روش‌های آماری در همه‌ی مراحل طراحی، تولید، نگهداری و خدمات این فناوری‌ها با هدف برآورده ساختن اقتصادی خواسته‌ها، از موقعیت ویژه‌ای برخوردار شده است.

در سازمان‌های تولیدی، روش‌های آماری که تحت عنوان کنترل کیفیت آماری مطرح می‌شوند، در همه‌ی فعالیت‌های مراحل مربوط به چرخه‌ی تحقق محصول (کالا یا خدمات) که دارای سه بخش عمده‌ی:

- ۱- فعالیت‌های قبل از ساخت (شامل فعالیت‌های بازاریابی، طراحی محصول، طراحی فرایند ساخت و ...)
- ۲- فعالیت‌های حین ساخت (شامل فعالیت‌های تولیدی)
- ۳- فعالیت‌های بعد از ساخت (شامل فعالیت‌های بسته‌بندی، ذخیره‌سازی، ارسال و ...)

است، به کار گرفته می‌شوند. از سه فعالیت مذکور، دو فعالیت اول نقش بیش‌تری در هزینه‌های کل یک محصول خواهند داشت. در این ارتباط، مراحل روش بهینه‌سازی قبل از ساخت، باعث بهینه شدن هزینه‌های واحد ساخت می‌شود، در حالی که روش‌های بهینه‌سازی مربوط به فعالیت‌های حین ساخت که در مرحله‌ی تولید به کار گرفته می‌شود، یعنی جایی که محصول با کیفیت طراحی شده و هزینه‌ی ساخت مشخص ساخته می‌شود، عمدتاً باعث حفظ دستاوردهای ناشی از فعالیت‌های مراحل قبل می‌شود و می‌تواند هزینه‌های ناشی از نوسانات در دامنه‌ی تعریف‌شده توسط طراحی را نیز به حد اقل

برساند. حفظ دستاوردهای مرحله‌ی بهینه‌سازی قبل از ساخت در مرحله‌ی حین ساخت و حد اقل نمودن هزینه‌های تعریف‌شده توسط فنون آماری از طریق نمودارهای کنترل در مبحث کنترل آماری فرایند (SPC)<sup>۳</sup> انجام می‌گیرد [۱].

در دهه‌ی ۱۹۲۰، دکتر شوهارت اولین نمودار کنترل برای پایش فرایند را ارائه داد. بعدها این نمودار توسعه یافت و به‌طور گسترده به‌عنوان ابزار مهمی در کنترل آماری فرایند مورد استفاده قرار گرفت. وظیفه‌ی اصلی نمودارهای کنترل، کشف رخداد انحراف‌های تخصیص‌پذیری است که موجب تغییر معناداری در پارامترهای توزیع فرایند می‌شوند. بنا بر این، می‌توان اصلاح لازم را قبل از تولید تعداد زیادی از محصول نامنطبق انجام داد. در این ارتباط، طراحی نمودارهای کنترل به تعیین سه پارامتر طراحی نیاز دارد: اندازه‌ی نمونه ( $n$ )، فاصله‌ی زمانی بین نمونه‌ها ( $h$ ) و پهنای حدود کنترل ( $k$ ). رایج‌ترین طراحی، روش ابتکاری<sup>۴</sup> دکتر شوهارت (۱۹۳۹) است که در آن  $n = 5$ ،  $k = 3$  و  $h = 1$  ساعت است. اگر چه اجرای این طراحی آسان است اما ممکن است از لحاظ اقتصادی، نمودار کنترل بهینه‌ای را ارائه ندهد. در مقابل این روش، سه روش طراحی دیگر، یعنی روش اقتصادی، آماری و آماری-اقتصادی وجود دارند.

طراحی اقتصادی برای اولین بار توسط دانکن معرفی شد که در آن هدف، مینیم ساختن هزینه‌های کل بود، وقتی که فقط یک انحراف تخصیص‌پذیر وجود داشته باشد [۲]. در این طراحی کاربر نه تنها پارامترهای توزیع فرایند، بلکه پارامترهای هزینه و نتایج را در یک طراحی بهینه‌ی اقتصادی برآورد می‌کند. طراحی آماری، قیودی را در متوسط مدت اجرا (ARL)<sup>۵</sup> بدون بررسی پارامترهای هزینه و توزیع فرایند اعمال می‌کند. بنا بر این، تغییرات ایجاد شده در فرایند اندازه‌گیری می‌شوند و از اخطارهای نادرست و اصلاحات نامناسب جلوگیری می‌شود. در نتیجه، محصول یا خدمات با کیفیت بالا به دست می‌آید [۴]. سرانجام، طراحی آماری-اقتصادی روشی است که برای اولین بار توسط سانیکا معرفی شد [۷] و در آن قیودی در ARL برای احتمال خطای نوع اول و نوع دوم یا متوسط زمان تا هشدار (ATS)<sup>۶</sup> گنجانده شد. در این طراحی، پارامترهای توزیع فرایند علاوه بر احتمال خطای نوع اول و نوع دوم برآورد می‌شوند. سانیکا نشان داد که طراحی‌های آماری-اقتصادی از نظر ویژگی‌های آماری با طراحی‌های آماری قابل مقایسه بوده و در کاربرد اقتصادی‌تر هستند [۷].

در این ارتباط، بیش‌تر مدل‌های موجود طراحی‌های صرفاً اقتصادی و طراحی‌های آماری- اقتصادی نمودارهای کنترل برای حفظ سطح جاری کیفیت فرایند گسترش یافته‌اند. در سال ۱۹۹۶، وهه‌با یک مدل کنشی برای بهبود فرایند ارایه داد [۷]، که در ادامه به معرفی این مدل می‌پردازیم و سپس تعمیم این مدل را که توسط اپرچت در سال ۲۰۰۷ انجام شد [۳] و برای طراحی توأم نمودارهای کنترل به کار می‌رود، بیان می‌کنیم. در آخر نیز با ذکر یک مثال، کاربرد مدل کنشی اپرچت و نیز بهینه‌سازی آن را نشان می‌دهیم. برای تسهیل بهینه‌سازی که در واقع، همان جستجوی پارامترهای طراحی نمودار کنترل بهینه است، از نرم‌افزار Mathcad13 استفاده شده است.

## ۲- مدل کنشی وهه‌با

در سال ۱۹۹۶ وهه‌با، یک مدل کنشی را ارایه داد که در انجام عملیات اقتصادی، مقدار بهبودیافته‌ای برای فرایند پیوسته به دست می‌دهد. این مدل، دو مؤلفه‌ی اصلی هزینه را در نظر گرفته است. یکی هزینه‌ی واکنشی<sup>۷</sup> است که برآورد هزینه‌های مربوط به کیفیت ایجاد شده در سطح پایداری مفروض فرایند را ارایه می‌دهد. این هزینه شامل هزینه‌های پایش فرایند<sup>۸</sup>، بازرسی محصول<sup>۹</sup> و زیان ناشی از انحراف از هدف طراحی و برنامه‌ی زمان‌بندی تحویل<sup>۱۰</sup> است. مؤلفه‌ی دوم هزینه‌ی دستیابی به سطح بهبود کیفیت فرایند را بررسی می‌کند و از این رو هزینه‌ی کنشی نامیده شده است. این مؤلفه، هزینه‌ی انجام تغییرات طراحی شده برای فرایند پایدار را به‌عنوان بخشی از تلاش مستمر برای بهبود فرایند محاسبه می‌کند. وهه‌با، این دو مؤلفه هزینه را به صورت زیر محاسبه کرده است [۹]:

### ۲-۱- هزینه‌ی واکنشی کیفیت

۱- هزینه‌ی پایش فرایند:

$$(۱) \quad E(C_c) = NB \left[ (1-\alpha) \frac{n}{N} + \alpha \left( 1 + \frac{W}{NB} \right) \right]$$

که در آن،  $N$  اندازه‌ی انباشته<sup>۱۱</sup>،  $B$  هزینه‌ی بازرسی یا اندازه‌گیری هر واحد،  $\alpha$  احتمال اخطار نادرست یا احتمال خطای نوع اول،  $n$  اندازه‌ی (زیرگروه) نمونه‌ی نمودار کنترل و  $W$  هزینه‌ی بررسی اخطار نادرست هستند.

۲- هزینه‌ی بازرسی محصول:

$$(۲) \quad E(C_a) = \frac{NB}{(1-p)} \left\{ 1 + Q \left( 1 - \frac{n_s}{N} \right) (1-p) \left( p \frac{A'}{B} - 1 \right) \right\}$$

که در آن،  $P$  احتمال رد انباشته،  $Q$  احتمال پذیرش انباشته،  $n_s$  تعداد واحدهای انتخاب شده از انباشته برای بازرسی نمونه‌ای (نمونه‌گیری برای پذیرش) و  $A'$  هزینه دوباره‌کاری هر واحد معیوب هستند.

۳- هزینه‌ی انحراف:

$$(۳) \quad E(C_d) = N \frac{A}{\Delta^2} \left\{ \sigma^2 + (\mu - m)^2 \right\} + \frac{a}{\rho^2} v^2$$

که در آن،  $A$  هزینه‌ی اسقاطی یا دوباره‌کاری هر واحد در کارخانه،  $\Delta$  نصف فاصله‌ی رواداری  $x$  (فاصله‌ی رواداری  $x$  برابر  $6\sigma$  است)،  $(\mu, \sigma)$  پارامترهای تابع چگالی احتمال مشخصه‌ی نرمال  $x$ ، هدف طراحی برای مشخصه‌ی  $x$ ،  $a$  هزینه‌ی تأخیر هر انباشته<sup>۱۲</sup>،  $\rho$  فاصله‌ی زمانی تفاوت بین  $D$  و  $\lambda$  یعنی  $D - \lambda$ ،  $D$  زمان تحویل انباشته<sup>۱۳</sup>،  $\lambda$  زمان پردازش انباشته<sup>۱۴</sup>،  $v^2 = (e + \lambda_r p)^2 \{ N^2 - Q(1-\alpha)(N^2 - n_s^2) \}$  میانگین توان دوم تأخیر<sup>۱۵</sup>،  $e$  زمان اندازه‌گیری هر واحد،  $\lambda_r$  زمان تعمیر هر واحد نامنطبق و  $p$  نسبت برآورد شده‌ی واحدهای نامنطبق در هر انباشته است. با جمع بستن معادله‌های (۱)، (۲) و (۳)، تابع هزینه‌ی واکنشی کل هر انباشته با سطح عملکرد مفروض به صورت زیر به دست می‌آید:

$$(۴) \quad E(RC)_L = \frac{E(RC)}{E(\lambda_t)} = \frac{NB}{E(\lambda_t)} \left[ (1-\alpha) \frac{n}{N} + \alpha \left( 1 + \frac{W}{NB} \right) + \frac{1}{(1-p)} \left\{ (1+Q(1-p)) \left( p \frac{A'}{B} - 1 \right) \left( 1 - \frac{n_s}{N} \right) \right\} + \frac{A}{B \Delta^2} \left\{ \sigma^2 + (\mu - m)^2 \right\} + \frac{a}{\rho^2} \frac{1}{NB} v^2 \right]$$

که در آن،  $E(\lambda_t)$  زمان مورد انتظار چرخه و  $\lambda_t$  زمان اتمام کار انباشته<sup>۱۶</sup> است. واژه‌ی  $L$  نیز برای تعیین سطح کیفیت فرایند به کار برده می‌شود.

۲-۲- هزینه کنشی کیفیت

$$(۵) \quad E(IC) = \frac{1}{G} \left\{ CM \left( \bar{t} + \frac{h}{1-\beta} \right) + Y^- \right\}$$

که در آن،  $E(IC)$  هزینه بهبود کل<sup>۱۷</sup>،  $C$  افزایش هزینه عملیاتی در هر واحد زمان در طول مرحله‌ی آزمون یا ارزیابی،  $M$  تعداد کل تغییرات پیشنهادی که باید آزمون و ارزیابی شوند،  $\bar{t}$  برآورد میانگین زمان تنظیم فرایند،  $h$  فاصله‌ی زمانی بین نمونه‌های پیاپی،  $\beta$  احتمال خطای نوع دوم،  $\bar{Y}$  میانگین  $M$  تغییر پیشنهادی و  $G$  ضریب تحقق<sup>۱۸</sup> در فاصله‌ی  $(0, 1)$  است و نشان‌دهنده‌ی این است که طرح به بهبود پیش‌بینی شده می‌رسد. در حالت نداشتن داده‌های مناسب، مقدار  $0/۲۵$  را برای  $G$  به کار می‌برند. برای مدل‌بندی تابع هزینه خالص جاری (NPC)، دو مؤلفه‌ی هزینه (واکنشی و کنشی در معادله‌های (۴) و (۵))، به صورت زیر با هم جمع می‌شوند:

$$(۶) \quad \begin{aligned} NPC = & \frac{1}{G} \left\{ CM \left( \bar{t} + \frac{h}{1-\beta} \right) + Y^- \right\} \\ & + \frac{\gamma \omega RB}{g_1} \left[ (1-\alpha) \frac{n}{Rh} + \frac{\alpha}{B} \left( B + \frac{W}{Rh} \right) \right. \\ & + \frac{1}{1-p} \left\{ 1 + Q(1-p) \left( p \frac{A'}{B} - 1 \right) (1-\theta_1) \right\} \\ & \left. + \frac{A}{B \Delta^2} \{ \sigma^2 + (\mu - m)^2 \} + \frac{a}{\rho^2} \frac{g_2 h}{RB} \right] \end{aligned}$$

که در آن،  $\gamma$  زمان کل عملیات در نرخ بهره<sup>۱۹</sup>،  $\omega = \frac{1 - (1+i)^{-j}}{i}$  ضریب تنزیل<sup>۲۰</sup>،  $i$  نرخ بهره‌ی مؤثر در هر دوره‌ی زمانی<sup>۲۱</sup>،  $j$  تعداد متناهی از دوره‌های بعدی برای تولید،  $R$  میزان تولید و

$$\begin{aligned} g_1 = & 1 + R \left[ (e + \lambda_r p) \{ 1 - Q(1-\alpha)(1-\theta_1) \} \right], \\ g_2 = & R^2 \left[ (e + \lambda_r p)^2 \{ 1 - Q(1-\alpha)(1-\theta_1^2) \} \right], \end{aligned}$$

$$\theta_1 = \begin{cases} 1 & p \geq \frac{B}{A'} \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

و

$$Q = \begin{cases} 0 & p \geq \frac{B}{A'} \\ 1 & \text{o.w.} \end{cases}$$

هستند. این مدل شامل هزینه‌ی بهبود فرایند است و نیاز به برآورد پارامترهای توزیع فرایند در حالت خارج از کنترل ندارد. ولی این مدل وهه‌با، فقط برای نمودار کنترل تک‌ی ارائه شد [۹]. در صورتی که تلاش برای بهبود، کاهش انحراف میانگین فرایند از مقدار هدف طراحی و کاهش تغییرپذیری فرایند را به‌طور همزمان هدف قرار می‌دهد. بنا بر این، باید توجه ویژه‌ای به طراحی اقتصادی توأم نمودارهای کنترل اختصاص داده شود. از این رو در ادامه، روشی که برای تعمیم مدل کنشی وهه‌با توسط اپرچت در سال ۲۰۰۷ مطرح شد و برای طراحی اقتصادی توأم نمودارهای کنترلی که برای پایش میانگین و پراکندگی فرایند به‌طور همزمان به کار می‌روند [۳]، ارایه می‌گردد.

### ۳- مدل کنشی اپرچت

اپرچت در [۳] به‌منظور گسترش مدل کنشی وهه‌با ([۹])، شرایط زیر را در نظر گرفت:

۱. احتمال اخطار نادرست (خطای نوع اول و نوع دوم) بر اساس دو نمودار و نه یک نمودار محاسبه می‌شود که این کار سبب افزایش احتمال اخطار نادرست می‌شود. هر یک از احتمال‌ها به‌طور جداگانه محاسبه می‌شوند و سپس نظریه‌ی احتمال برای تعیین احتمال توأم آن‌ها استفاده می‌شود.

۲. یافتن انحراف‌های تخصیص‌پذیری که میانگین فرایند را تحت تأثیر قرار می‌دهند ممکن است ساده‌تر از یافتن انحراف‌های تخصیص‌پذیری باشد که تغییرپذیری فرایند را تحت تأثیر قرار می‌دهند. بنا بر این، فرض می‌شود که هزینه‌ی بررسی اخطار نادرست برای هر نمودار متفاوت است و در نتیجه، هزینه‌ی مورد انتظار  $(T')$  به‌عنوان متوسط هزینه‌ی بررسی اخطار نادرست دو نمودار محاسبه می‌شود.

۳. زمان لازم برای آزمون و ارزیابی تغییرات فرایند بر اساس توان دو نمودار است. بنا بر این، توان توأم نمودارهای کنترل افزایش می‌یابد و توان توأم بر اساس توان هر نمودار محاسبه می‌شود.

همچنین باید توجه داشت که متوسط هزینه اجرای ابتکارات بهبودی که تغییرپذیری فرایند را کاهش می‌دهد از متوسط هزینه کاهش انحراف میانگین فرایند از مقدار هدف، متفاوت است. بنا بر این اپرچت برای گسترش مدل کنشی وهه با ([۹]) جهت استفاده از دو نمودار کنترل، تغییراتی در تابع هزینه خالص جاری (NPC) ایجاد کرد که برای انجام این کار مفاهیم زیر را تعریف نمود:

$\alpha'$  احتمال اخطار نادرست توأم دو نمودار کنترل است.  $\alpha'$  تابعی از  $(\alpha_1, \alpha_2)$  در فرم  $\alpha' = 1 - \prod_{i=1}^2 (1 - \alpha_i)$  است که در آن،  $\alpha_1$  و  $\alpha_2$  احتمال‌های اخطار نادرست برای هر نمودار است.

$\beta'$  نشان‌دهنده‌ی خطای نوع دوم توأم دو نمودار و  $1 - \beta'$  توان توأم نمودارها است که آن را می‌توان با  $1 - \beta' = 1 - \prod_{i=1}^2 \{1 - (1 - \beta_i)\}$  تقریب زد که در آن،  $\beta_1$  و  $\beta_2$  احتمال‌های خطای نوع دوم هر نمودار است.

$T'$  متوسط هزینه‌ی بررسی اخطار نادرست دو نمودار است که به صورت  $T' = (\sum_{i=1}^2 T_i) / 2$  تعریف می‌شود و در آن،  $T_1$  و  $T_2$  هزینه‌ی بررسی اخطار نادرست هر نمودار است.

بقیه‌ی نمادگذاری‌ها همانند مدل کنشی وهه با ([۹]) هستند. در نتیجه، طبق شرایطی که در بالا ذکر گردید، تابع هزینه‌ی خالص جاری (NPC) مدل کنشی وهه با ([۹]) در معادله‌ی (۶)، به صورت زیر در می‌آید:

$$\begin{aligned} NPC = & \frac{1}{G} \left\{ CM \left( \bar{t} + \frac{h}{1 - \beta'} \right) + \bar{Y} \right\} \\ & + \frac{\gamma \omega RB}{g_1} \left[ (1 - \alpha') \frac{n}{Rh} + \frac{\alpha'}{B} \left( B + \frac{T'}{Rh} \right) \right] \\ & + \frac{1}{1 - p} \left\{ 1 + Q(1 - p) \left( p \frac{A'}{B} - 1 \right) (1 - \theta) \right\} \end{aligned}$$



$$(۷) \quad + \frac{A}{B \Delta^r} \{ \sigma^r + (\mu - m)^r \} + \frac{a}{\rho^r} \frac{g_r h}{RB} \Big]$$

که در آن

$$g_1 = 1 + R \left[ (e + \lambda_r p) \{ 1 - Q(1 - \alpha')(1 - \theta_1) \} \right],$$

$$g_r = R^r \left[ (e + \lambda_r p) \{ 1 - Q(1 - \alpha')(1 - \theta^r) \} \right],$$

$$\theta_1 = \begin{cases} 1 & p \geq \frac{B}{A'}, \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

و

$$Q = \begin{cases} 0 & p \geq \frac{B}{A'} \\ 1 & \text{o.w.} \end{cases}$$

هستند. اپرچت با استفاده از این مدل کنشی تعمیم یافته، به طراحی اقتصادی توأم نمودارهای کنترل  $\bar{X}$  و  $R$  و سپس  $\bar{X}$  و  $S$  پرداخت که در زیر به آن‌ها اشاره می‌شود.

#### ۴- طراحی اقتصادی توأم نمودارهای کنترل $\bar{X}$ و $R$

مرحله‌ی اصلی طراحی نمودارهای کنترل  $\bar{X}$  و  $R$ ، فرمول‌بندی احتمال خطای نوع اول و نوع دوم به‌طور جداگانه برای هر نمودار و سپس استفاده از نظریه‌ی احتمال برای برآورد احتمال خطای توأم است.

##### ۴-۱- احتمال‌های خطای نمودار کنترل $R$

اگر  $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}$  یک نمونه‌ی تصادفی از  $n$  مشاهده‌ی مرتب‌شده از یک جامعه‌ی نرمال با میانگین  $\mu_1$  و واریانس  $\sigma_1^2$  باشند و  $R = X_{\max} - X_{\min}$  دامنه‌ی چنین نمونه‌ای باشد، آن‌گاه تابع توزیع تجمعی دامنه‌ی استاندارد شده‌ی  $w = R/\sigma$  توسط پی‌یرسون و هارتلی در [۶]، به صورت زیر بیان شده است:

$$P(w) = \left\{ \int_{-w/\sqrt{2}}^{w/\sqrt{2}} \varphi(x) dx \right\}^n + 2n \int_{w/\sqrt{2}}^{\infty} \varphi(u) \left\{ \int_{u-w}^{\infty} \varphi(x) dx \right\}^{n-1} du$$

که در آن،  $\varphi(x) = (\sqrt{2}\pi)^{-1/2} e^{-x^2/2}$  است. بنا بر این، مقدار مورد انتظار  $w$  به صورت  $\mu_w = d_{\sqrt{2}} = \int_0^{\infty} w f(w) dw = \lambda - \int_0^{\lambda} P(w) dw$  و انحراف استاندارد  $w$  با  $\sigma_w = d_{\sqrt{2}} = \sqrt{\int_0^{\infty} w^2 f(w) dw - d_{\sqrt{2}}^2} = \sqrt{6\lambda - 2 \int_0^{\lambda} w P(w) dw - d_{\sqrt{2}}^2}$  محاسبه می‌شود.  $f(w)$ ، تابع چگالی احتمال دامنه‌ی استاندارد شده‌ی  $w$  است. با نزدیکی مقدار  $w$  به  $\lambda$ ،  $f(w)$  به مقدار صفر نزدیک می‌شود و بنا بر این،  $P(\lambda) = 1$  است. در نتیجه، احتمال خطای نوع اول نمودار کنترل  $R$  به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} \alpha_R &= 1 - \Pr(LCL_R \leq R \leq UCL_R \mid \sigma = \sigma_1) \\ (8) \quad &= 1 - \Pr(D_1 \leq W \leq D_{\sqrt{2}}) \\ &= 1 - (P(D_{\sqrt{2}}) - P(D_1)) \end{aligned}$$

که در آن  $UCL_R = D_{\sqrt{2}}\sigma = (d_{\sqrt{2}} + 3d_{\sqrt{2}})\sigma$  و  $LCL_R = D_1\sigma = (d_{\sqrt{2}} - 3d_{\sqrt{2}})\sigma$  به ترتیب حدود پایین و بالای نمودار  $R$  هستند. احتمال خطای نوع دوم:

$$\begin{aligned} \beta_R &= \Pr(LCL_R \leq R \leq UCL_R \mid \sigma \neq \sigma_1) \\ (9) \quad &= \Pr\left(\frac{D_1}{\lambda} \leq W \leq \frac{D_{\sqrt{2}}}{\lambda}\right) \\ &= P\left(\frac{D_{\sqrt{2}}}{\lambda}\right) - P\left(\frac{D_1}{\lambda}\right), \quad \lambda = \frac{\sigma_0}{\sigma_1} \end{aligned}$$

و  $1 - \beta_R$  توان نمودار  $R$  است. شایان ذکر است که در این‌جا برای مثال، احتمال خطای نوع اول (احتمال اخطار نادرست)، احتمال رد این ادعا است که تلاش برای بهبود فرایند، باعث کاهش دامنه‌ی فرایند می‌شود، در شرایطی که در واقع چنین نتیجه‌ای حاصل شده است.

۲-۴- احتمال‌های خطای نمودار  $\bar{X}$ 

طبق قضیه‌ی حد مرکزی، توزیع میانگین‌های نمونه از توزیع نرمال تبعیت می‌کند و بنا بر این، احتمال خطای نوع اول و احتمال خطای نوع دوم نمودار  $\bar{X}$  به ترتیب به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\begin{aligned} \alpha_{\bar{X}} &= 1 - \Pr\{LCL_{\bar{X}} \leq \bar{X} \leq UCL_{\bar{X}} \mid (\mu_1, \sigma_1)\} \\ (10) \quad &= 2\{1 - \Phi(3)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_{\bar{X}} &= \Pr(LCL_{\bar{X}} \leq \bar{X} \leq UCL_{\bar{X}} \mid \mu = \mu_1 + \delta\sigma) \\ (11) \quad &= \Pr(-3 - \delta\sqrt{n} \leq Z \leq 3 - \delta\sqrt{n}) \\ &= \Phi(3 - \delta\sqrt{n}) - \Phi(-3 - \delta\sqrt{n}) \end{aligned}$$

که در آن،  $\Phi(\cdot)$  تابع توزیع تجمعی نرمال استاندارد است. در نتیجه، احتمال اخطار درست نمودار  $\bar{X}$  یعنی همان توان نمودار  $\bar{X}$  برابر با  $1 - \beta_{\bar{X}}$  است. می‌توان گفت که در این جا برای مثال، احتمال خطای نوع دوم، احتمال پذیرش این ادعا است که تلاش برای بهبود فرایند موجب انطباق میانگین فرایند بر مقدار هدف آن می‌شود، در شرایطی که در واقع چنین نتیجه‌ای حاصل نشده است.

۳-۴- احتمال‌های خطای توأم نمودارهای کنترل  $\bar{X}$  و  $R$ 

هرگاه فرایند تحت کنترل آماری باشد، نمودارهای کنترل  $\bar{X}$  و  $R$  مستقل از هم هستند. بنا بر این، قانون جمع احتمال برای فرمول‌بندی احتمال اخطار نادرست توأم نمودارهای کنترل  $\bar{X}$  و  $R$  به صورت زیر به کار می‌رود:

$$(12) \quad \alpha' = \alpha_{\bar{X}} + \alpha_R - \alpha_R \alpha_{\bar{X}}$$

که در آن،  $\alpha_{\bar{X}}$  و  $\alpha_R$  به ترتیب احتمال‌های خطای نوع اول برای نمودارهای  $\bar{X}$  و  $R$  هستند.

با وجود این هرگاه فرایند خارج از کنترل باشد، نمودارهای کنترل  $\bar{X}$  و  $R$  مستقل از هم نیستند. بنا بر این، باید فرض استقلال برای تقریب احتمال اخطار درست توأم نمودارهای کنترل  $\bar{X}$  و  $R$  به صورت زیر برقرار باشد:

$$(۱۳) \quad 1 - \beta' \cong P_{\bar{X}} + P_R - P_{\bar{X}}P_R$$

که در آن،  $P_{\bar{X}}$  و  $P_R$  به ترتیب توان نمودارهای کنترل  $\bar{X}$  و  $R$  هستند. در اینجا،  $1 - \beta'$  احتمال پذیرش این ادعا است که تلاش برای بهبود فرایند موجب کاهش دامنه‌ی فرایند و کاهش انحراف میانگین فرایند از هدف طراحی می‌شود، در شرایطی که در واقع چنین نتیجه‌ای حاصل شده است.

### ۵- طراحی اقتصادی توأم نمودارهای کنترل $\bar{X}$ و $S$

اگر چه نمودارهای کنترل  $\bar{X}$  و  $R$  به طور گسترده استفاده می‌شوند اما گاهی اوقات مناسب است که به جای استفاده از دامنه‌ی نمونه، انحراف استاندارد فرایند را به طور مستقیم برآورد کنیم که این کار مستلزم طراحی نمودارهای کنترل  $\bar{X}$  و  $S$  است که  $S$ ، انحراف استاندارد نمونه است. در واقع، هرگاه اندازه‌ی نمونه ( $n$ ) نسبتاً بزرگ باشد به عبارت دیگر  $n > 10$ ، آن‌گاه نمودارهای کنترل  $\bar{X}$  و  $S$  بر نمودارهای  $\bar{X}$  و  $R$  ترجیح داده می‌شود. این ارجحیت به این دلیل است که روش دامنه برای برآورد  $\sigma$  برای تعدیل نمونه‌های بزرگ، کارایی آماری را از دست می‌دهد. فرمول‌بندی احتمال‌های خطای نوع اول، نوع دوم و توأم این نمودارها همانند نمودار کنترل  $\bar{X}$  و  $R$  است، با این تفاوت که برای هر نمونه به جای محاسبه‌ی میانگین و دامنه‌ی هر نمونه، میانگین و انحراف استاندارد نمونه محاسبه می‌شود.

#### ۵-۱- احتمال‌های خطای نمودار کنترل $S$

فرض کنید  $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}$  یک نمونه‌ی تصادفی از  $n$  مشاهده باشند که از یک جامعه‌ی نرمال با میانگین  $\mu_1$  و واریانس  $\sigma_1^2$  انتخاب شده باشند و

$$E(S) = C_p \sigma \quad \text{که می‌دانیم} \quad S = \sqrt{\left\{ \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right\} / (n-1)}$$

است که در آن، مقدار  $C_p$  به اندازه‌ی نمونه‌ی  $n$  بستگی دارد و به صورت

$C_{\tau} = \left(\frac{\tau}{n-1}\right)^{1/\tau} \cdot \frac{\Gamma(n/\tau)}{\Gamma\{(n-1)/\tau\}}$  نوشته می‌شود. علاوه بر این، انحراف استاندارد  $S$ ، همچنین می‌دانیم که توزیع نمونه‌گیری  $\{(n-1)s^{\tau}\}/\sigma^{\tau}$ ،  $\sigma\sqrt{1-C_{\tau}^{\tau}}$  است.  $(\chi^{\tau})$  با  $\nu = n-1$  درجه‌ی آزادی است که تابع چگالی احتمال  $\chi^{\tau}$  دو به صورت

$$f(\chi^{\tau}) = \frac{1}{\tau^{\frac{\nu}{\tau}} \Gamma\left(\frac{\nu}{\tau}\right)} (\chi^{\tau})^{\frac{\nu}{\tau}-1} e^{-\frac{\chi^{\tau}}{\tau}}, \quad 0 \leq \chi^{\tau} \leq \infty$$

است. بنا بر این، احتمال خطای نوع اول به صورت تابعی از تابع چگالی احتمال  $\chi^{\tau}$  دو به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\alpha_s = 1 - \int_{\chi_1^{\tau}}^{\chi_2^{\tau}} \frac{1}{\tau^{\frac{\nu}{\tau}} \Gamma\left(\frac{\nu}{\tau}\right)} (\chi^{\tau})^{\frac{\nu}{\tau}-1} e^{-\frac{\chi^{\tau}}{\tau}} d\chi^{\tau} \quad (14)$$

که در آن،

$$\chi_1^{\tau} = (n-1)B_{\delta}^{\tau} = (n-1)\left(C_{\tau} - \tau\sqrt{1-C_{\tau}^{\tau}}\right)^{\tau}$$

و

$$\chi_2^{\tau} = (n-1)B_{\varepsilon}^{\tau} = (n-1)\left(C_{\tau} + \tau\sqrt{1-C_{\tau}^{\tau}}\right)^{\tau}$$

هستند. همچنین، احتمال خطای نوع دوم برای نمودار  $S$  به صورت

$$\beta_s = \int_0^{\chi_1^{\tau}} \frac{1}{\tau^{\frac{\nu}{\tau}} \Gamma\left(\frac{\nu}{\tau}\right)} (\chi^{\tau})^{\frac{\nu}{\tau}-1} e^{-\frac{\chi^{\tau}}{\tau}} d\chi^{\tau} \quad (15)$$

قابل محاسبه است که در آن،  $\chi_1^{\tau} = (n-1)\left(\frac{B_{\varepsilon}}{\lambda}\right)^{\tau}$  و  $\lambda = \frac{\sigma_0}{\sigma_1}$  و  $(\lambda > 1)$  و  $1 - \beta_s$  توان نمودار است.

## ۲-۵- احتمال‌های خطای توأم نمودارهای کنترل $\bar{X}$ و $S$

بر اساس معادله‌های احتمال اخطارهای نادرست و توان نمودارهای  $\bar{X}$  و  $S$ ، احتمال خطای نوع اول توأم نمودارهای  $\bar{X}$  و  $S$  به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$(۱۶) \quad \alpha' = \alpha_{\bar{X}} + \alpha_S - \alpha_S \alpha_{\bar{X}}$$

که در آن،  $\alpha_S$  و  $\alpha_{\bar{X}}$  به ترتیب احتمال‌های خطای نوع اول نمودارهای  $\bar{X}$  و  $S$  هستند. همچنین، احتمال اخطار درست توأم برای این نمودارها با

$$(۱۷) \quad 1 - \beta' \cong P_{\bar{X}} + P_S - P_{\bar{X}} P_S$$

تقریب زده می‌شود که در آن،  $P_S$  و  $P_{\bar{X}}$  به ترتیب توان نمودارهای  $\bar{X}$  و  $S$  هستند. البته باید توجه داشت فرض استقلالی که در بخش (۳-۴) به کار رفت، در اینجا برای احتمال اخطار درست توأم نمودارهای کنترل  $\bar{X}$  و  $S$  نیز برقرار است. بسته به کاربردی که داریم، احتمال اخطارهای درست و اخطارهای نادرست توأم در تابع NPCی معادله‌ی (۷) قرار داده می‌شوند. در ادامه با یک مثال کاربرد این طراحی‌ها را نشان می‌دهیم و سپس به بهینه‌سازی مدل حاصل می‌پردازیم.

## ۶- مثال

با استفاده از یک مجموعه داده‌های واقعی که توسط وهه‌با در سال ۲۰۰۴ از یک شرکت تولیدی جمع‌آوری شده و محاسبه‌ی مدل مربوط بر اساس آن انجام گرفته است [۱۰]، به بررسی مدل اپرچت ([۳]) می‌پردازیم. در واقع، در ابتدا طراحی اقتصادی توأم نمودارهای کنترل  $\bar{X} - S$  و  $\bar{X} - R$  را بررسی نموده و سپس به بهینه‌سازی مدل می‌پردازیم. داده‌ی مورد استفاده، اندازه‌ی طول میخ‌های فولادی است. فرایندی که برای ساخت این میخ‌ها به کار می‌رود، با استفاده از نمودارهای کنترل  $\bar{X} - R$ ، تحت کنترل آماری قرار دارد. طول این میخ‌ها، مشخصه‌ی کیفیت مهمی است که مشخصات طراحی در  $2/0 \pm 0/006$  (اینچ) قرار دارند و میزان تولید، ۱۰۰ واحد در ساعت برآورد شده است. داده‌های گذشته نشان می‌دهد که طول این میخ‌ها دارای توزیع نرمال با میانگین  $\mu_0 = 2/0015$  اینچ و انحراف استاندارد  $\sigma_0 = 0/002$  اینچ است. با وجود این، تلاش برای بهبود فرایند،

میانگین  $\hat{\mu}_1 = 2/00$  اینچ و انحراف استاندارد  $\hat{\sigma}_1 = 0/001$  اینچ را مد نظر قرار داده است.

گروه بهینه‌سازی، چهار تغییر در فرایند را پیشنهاد کردند که انتظار می‌رود دو تغییر از این چهار تغییر، تغییرپذیری فرایند و دو تغییر دیگر، انحراف میانگین فرایند از هدف طراحی را کاهش دهند. در واقع، گروه انتظار دارد که تغییر طراحی فیکسچر یا استفاده از خنک‌کننده‌ی جدید به کاهش تغییرپذیری فرایند کمک کند و تغییر سرعت برش یا ابزار برای رسیدن به هدف طراحی محصول کمک خواهد کرد. اعضای گروه، زمان تنظیم ماشین را  $2/5$  ساعت با متوسط هزینه‌ی اجرایی معادل  $350$  دلار برآورد کردند.

انتظار می‌رود که هزینه‌های اضافی ناشی از افزایش در اندازه‌گیری و فعالیت‌های تنظیم در طول عملیات،  $150$  دلار در ساعت باشد. نرخ بازده مؤثر شرکت ماهیانه  $4\%$  و زمان کل عملیات ماهیانه  $100$  ساعت است و همچنین، انتظار می‌رود که تولید در طول  $18$  ماه بعدی ادامه داشته باشد که به‌طور متوسط، برای جایگزینی یا تعمیر هر واحد نامنطبق  $0/3$  hrs زمان می‌برد. بقیه‌ی هزینه‌ها و پارامترهای توزیع فرایند به قرار زیر برآورد شده‌اند:

$$\begin{aligned} A' &= \$30 \text{ per unit} & T' &= \$1000 \text{ per occurrence} & A &= \$5 \text{ per unit} \\ \rho &= 2 \text{ hours} & G &= 0/25 & e &= 0/05 \text{ hour per unit} \\ B &= \$0/5 \text{ per unit} & a &= \$500 \text{ per lot} \end{aligned}$$

بخش بعدی، استفاده از طراحی اقتصادی توأم نمودارهای کنترل  $\bar{X}-R$  و بخش (۲-۶) نیز استفاده از طراحی اقتصادی توأم نمودارهای کنترل  $\bar{X}-S$  در طول بهبود فرایند را نشان می‌دهد. شایان ذکر است که اصلی‌ترین مرحله در بهینه‌سازی، مشخص کردن کرانه‌هایی برای پارامترهای طراحی  $n$  و  $h$  است تا تابع NPC برآورد شود. کران پایین اندازه‌ی نمونه‌ی  $n$  برای در نظر گرفتن برآورد تغییرپذیری فرایند،  $2$  قرار داده شده است. جدول‌های منتشر شده برای طراحی نمودارهای کنترل متغیر، برای مثال مونتگومری [۵] و ANSI/ASQC-B3 (۱۹۹۶) برای نمونه‌هایی تا اندازه‌ی  $25$  واحد، مقادیری برای  $n$  و  $h$  تعیین می‌کند که در بیش‌تر موارد،  $n$  بهینه بین  $2$  و  $25$  قرار می‌گیرد.

کران پایین جستجوی فاصله‌ی نمونه‌گیری بهینه با مینیمم مقدار  $\frac{n}{R}$  شروع می‌شود و  $0/1$  ساعت افزایش می‌یابد. روی حد بالایی  $h$ ، هیچ محدودیتی وجود ندارد.

### ۱-۶- نمودارهای کنترل $\bar{X} - R$

برای هر مقدار  $n$  ( $25 \leq n \leq 2$ )، برآوردهای متناظر  $\alpha'$  و  $1 - \beta'$  به ترتیب با استفاده از معادله‌های (۱۲) و (۱۳) محاسبه می‌شوند. در نتیجه این مقادیر  $n$ ،  $\alpha'$  و  $1 - \beta'$  با مقادیر مختلفی از  $h$  ( $0/1$ ،  $0/2$ ،  $0/3$ ،  $0/4$ ،  $0/5$ ،  $0/6$ ،  $0/7$ ) قابل قبول را می‌سازند. بنا بر این، این مقادیر برای یافتن جواب بهینه در معادله‌ی (۷) جایگزین می‌شوند و ترکیب‌های مختلفی از  $n$  و  $h$  برای تعیین ترکیب‌های بهینه‌ای که NPC را مینیمم کنند، بررسی می‌شوند. این کار، شمارش دقیق جواب قابل قبول نامیده می‌شود که روش کلی با استفاده از برنامه‌نویسی در نرم‌افزار Mathcad13 صورت می‌گیرد. توجه داشته باشید که ضریب حدود کنترل نمودارهای کنترل  $\bar{X}$  و  $R$ ، ثابت ۳ در نظر گرفته شده است. تابع NPC در هر ترکیبی از  $n$  و  $h$  با پارامترهای هزینه و زمان تعیین شده، برآورد می‌شود.

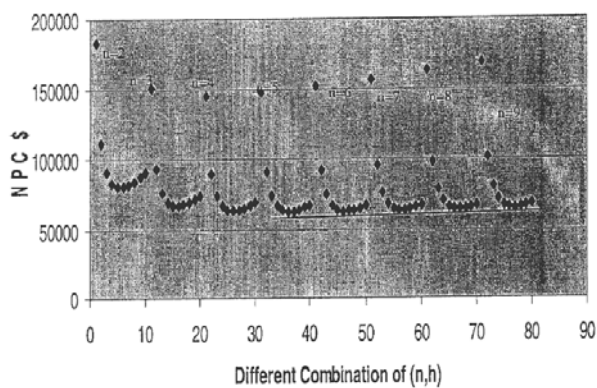
در زیر خروجی برنامه را مشاهده می‌کنید که در آن مقادیر مختلفی از NPC با مقادیر متناظر  $n$  و  $h$  محاسبه شده است. ستون آخر در جدول ۱ برای آزمون شرط  $h \geq \frac{n}{R}$  به کار می‌رود. اگر مقدار ستون آخر، نادرست باشد به این معنی است که این جواب قابل قبول نیست یا به عبارت دیگر شرط بالا صدق نمی‌کند.

از جدول ۱ و از نمودار NPC در شکل ۱ می‌توان دریافت که NPC در  $n = 5$ ، به مینیمم مقدار خود یعنی  $63230$  دلار می‌رسد و  $h$  بهینه‌ی متناظر با این مقدار  $n$ ،  $0/6$  ساعت است که در شکل ۲، نمودار تابع NPC را در مقابل فاصله‌ی نمونه‌گیری  $h$  نشان می‌دهد که به‌ازای اندازه‌ی نمونه‌ی بهینه‌ی  $n = 5$  رسم شده است.

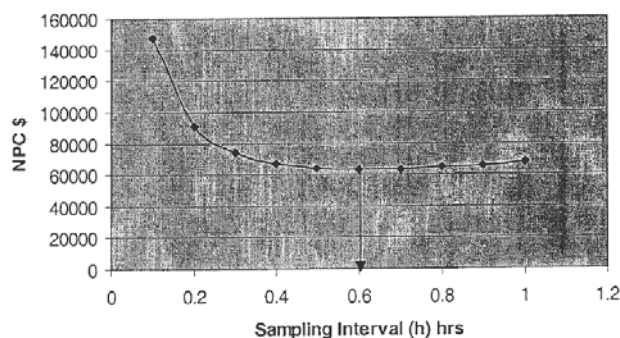


جدول ۱- مقادیر مختلفی از NPC با مقادیر متناظر  $n$  و  $h$

$h \geq \frac{n}{R}$	NPC	$h$	$n$	
"True"	$6/412 \times 10^4$	0/5	5	364
"True"	$6/323 \times 10^4$	0/6	5	365
"True"	$6/347 \times 10^4$	0/7	5	366
"True"	$6/443 \times 10^4$	0/8	5	367
"True"	$6/586 \times 10^4$	0/9	5	368
"True"	$6/762 \times 10^4$	1	5	369
"True"	$6/962 \times 10^4$	1/1	5	370
"True"	$7/181 \times 10^4$	1/2	5	371
"True"	$7/413 \times 10^4$	1/3	5	372
"True"	$7/656 \times 10^4$	1/4	5	373
"True"	$7/908 \times 10^4$	1/5	5	374
"True"	$8/167 \times 10^4$	1/6	5	375
"True"	$8/432 \times 10^4$	1/7	5	376
"True"	$8/701 \times 10^4$	1/8	5	377
"True"	$8/975 \times 10^4$	1/9	5	378
"True"	$9/253 \times 10^4$	2	5	379



شکل ۱- تابع NPC (در نمودار  $\bar{X} - R$ )



شکل ۲- NPC به ازای  $n = 5$  (مقدار بهینه)

همان‌طور که مشاهده می‌کنید  $n$  و  $h$  بهینه‌ای که NPC را مینیمم می‌کنند، درون کرانه‌های مفروض به دست آمده‌اند. بنا بر این، اصلاح بیش‌تری برای طراحی کرانه‌های پارامتر  $n$  و  $h$  لازم نیست. به عبارت دیگر، طراحی بهینه حاصل شده است.

### ۲-۶- نمودارهای کنترل $\bar{X} - S$

برای یافتن پارامترهای طراحی توأم بهینه‌ی نمودارهای کنترل  $\bar{X} - S$ ، روش مشابهی که برای نمودارهای کنترل  $\bar{X} - R$  استفاده شد، به کار برده می‌شود. این روش در زیر خلاصه شده است:

- برای هر مقدار  $n$  بین ۲ و ۲۵،  $\alpha_{\bar{X}}$ ،  $\alpha_S$ ،  $1 - \beta_{\bar{X}}$  و  $1 - \beta_S$  محاسبه می‌شوند.
- با استفاده از معادله‌های (۱۶) و (۱۷)،  $\alpha'$  و  $1 - \beta'$  محاسبه می‌شوند.
- ترکیب‌های مختلفی از  $h$  (بین ۰/۱ و ۱۲ با گام ۰/۱) و  $n$  (با مقادیر متناظر  $\alpha'$  و  $1 - \beta'$ ) در معادله‌ی (۷) جایگزین می‌شوند.
- مقادیر بهینه‌ی  $n$  و  $h$  به دست می‌آیند.

در جدول ۲ خروجی برنامه را مشاهده می‌کنید که در آن مقادیر مختلفی از NPC با مقادیر متناظر  $n$  و  $h$  محاسبه شده است. این جدول همانند جدول ۱ است.

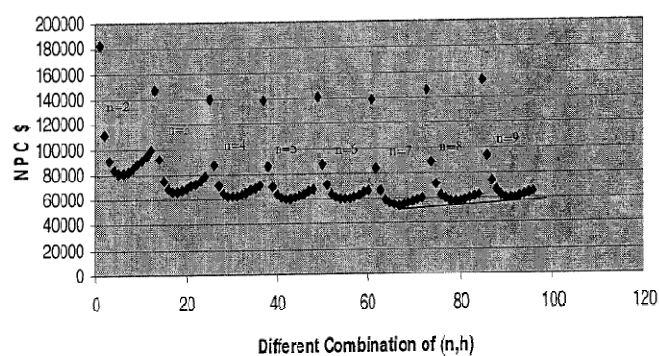
جدول ۲- مقادیر مختلفی از NPC با مقادیر متناظر  $n$  و  $h$ 

$h \geq \frac{n}{R}$	NPC	$h$	$n$	
"True"	$7/14 \times 10^4$	۰/۳	۷	۶۰۲
"True"	$6/425 \times 10^4$	۰/۴	۷	۶۰۳
"True"	$6/099 \times 10^4$	۰/۵	۷	۶۰۴
"True"	$5/967 \times 10^4$	۰/۶	۷	۶۰۵
"True"	$5/946 \times 10^4$	۰/۷	۷	۶۰۶
"True"	$5/994 \times 10^4$	۰/۸	۷	۶۰۷
"True"	$6/089 \times 10^4$	۰/۹	۷	۶۰۸
"True"	$6/216 \times 10^4$	۱	۷	۶۰۹
"True"	$6/367 \times 10^4$	۱/۱	۷	۶۱۰
"True"	$6/535 \times 10^4$	۱/۲	۷	۶۱۱
"True"	$6/717 \times 10^4$	۱/۳	۷	۶۱۲
"True"	$6/909 \times 10^4$	۱/۴	۷	۶۱۳
"True"	$7/111 \times 10^4$	۱/۵	۷	۶۱۴
"True"	$7/319 \times 10^4$	۱/۶	۷	۶۱۵
"True"	$7/532 \times 10^4$	۱/۷	۷	۶۱۶
"True"	$7/751 \times 10^4$	۱/۸	۷	۶۱۷

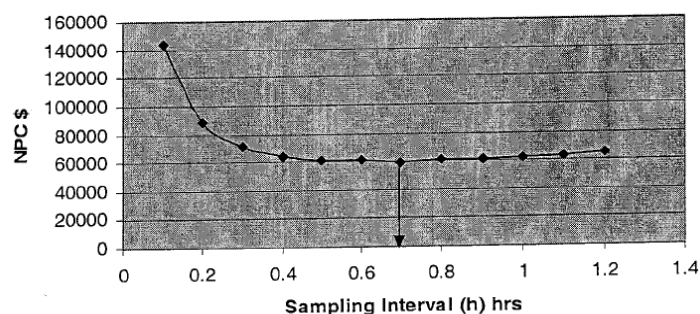
جدول ۲ و شکل ۳ نشان می‌دهد که تابع NPC در  $n = 7$  به مینیمم مقدار خود می‌رسد و شکل ۴، نمودار تابع NPC را در مقابل فاصله‌ی نمونه‌گیری  $h$  نشان می‌دهد که به‌ازای اندازه‌ی نمونه‌ی بهینه‌ی  $n = 7$  رسم شده است. همان‌گونه که مشاهده می‌شود فاصله‌ی نمونه‌گیری بهینه‌ی  $h$ ،  $0/7$  ساعت با مقدار NPC معادل  $59460$  دلار برآورد شده است.

همان‌طور که مشاهده می‌کنید  $n$  و  $h$  بهینه‌ای که NPC را مینیمم می‌کنند، درون کرانه‌های مفروض به دست آمده‌اند. بنا بر این، اصلاح بیش‌تری برای طراحی کرانه‌های پارامتر  $n$  و  $h$  لازم نیست. به عبارت دیگر، طراحی بهینه حاصل شده است. مقایسه‌ی نتایج دو طراحی می‌تواند به این تصمیم‌گیری کمک کند که آیا استفاده از نمودارهای کنترل  $\bar{x} - s$  از لحاظ اقتصادی به‌صرفه‌تر است یا نه؟ باید توجه داشت که در

این جا استفاده از نمودارهای کنترل  $\bar{X}-S$  به جای  $\bar{X}-R$  منجر به هزینه‌ی صرفه‌جویی شده‌ای معادل ۳۸۰۰ دلار می‌شود. با وجود این، این صرفه‌جویی در هزینه تنها تحت مقدار مفروضی از برآورد پارامترهای زمان و هزینه به دست آمده است. به نظر می‌رسد که یک تحلیل حساسیت جامع برای مطالعه‌ی اثر تغییر این برآوردها در طراحی بهینه‌ی هر گروه از نمودارها مهم خواهد بود. شایان ذکر است که با وجود این که نمودارهای کنترل  $\bar{X}-S$  نسبت به نمودارهای  $\bar{X}-R$  باعث صرفه‌جویی در هزینه می‌شوند، ولی با جایگزین کردن نمودارهای کنترل  $\bar{X}-S$  به جای نمودارهای  $\bar{X}-R$ ، هزینه‌ی آموزش نیز باید در نظر گرفته شود.



شکل ۳- تابع NPC (در نمودار  $\bar{X}-S$ )



شکل ۴- NPC به ازای  $n = 7$  (مقدار بهینه)

## ۷- خلاصه و نتیجه‌گیری

به دلیل این که بیش‌تر طراحی‌های اقتصادی، آماری و آماری-اقتصادی نمودارهای کنترل برای حفظ سطح جاری کیفیت فرایند استفاده می‌شوند، در این مقاله، مدل وهه‌با ([۹]) را معرفی کردیم که برای بهبود فرایند به کار می‌رود و برای طراحی نمودارهای کنترلی که جهت رسیدن به سطوح بهبود عملکرد فرایند و حفظ این سطوح کمک می‌کنند، استفاده می‌شود که این موضوع، مدل کنشی را در صف مناسب‌ترین مدل برای نیازهای فعلی صنعت قرار می‌دهد. با وجود این، وهه‌با ([۹]) تنها طراحی اقتصادی نمودارهای کنترل تکی یعنی  $\bar{X}$  یا  $S$  را ارائه داد. در صورتی که در صنعت معمولاً دو نمودار برای کنترل میانگین و تغییرپذیری فرایند در طول کار استفاده می‌شوند که این کار نیاز به طراحی توأم نمودارهای کنترل  $\bar{X}-R$  یا  $\bar{X}-S$  دارد. بنا بر این در ادامه، مدل کنشی اپرچت ([۳]) که تعمیمی از مدل کنشی وهه‌با ([۹]) است، را شرح دادیم. این مدل کنشی برای نمودارهای کنترلی است که برای کاهش انحراف میانگین فرایند از مقدار هدف و کاهش تغییرپذیری فرایند به‌طور هم‌زمان به کار می‌روند. اپرچت برای رسیدن به چنین هدفی، تعدادی تغییر در فرمول‌بندی تابع NPC مدل کنشی وهه‌با اعمال کرد. ما در ادامه، کاربرد مدل کنشی اپرچت ([۳]) را که در برگیرنده‌ی طراحی اقتصادی نمودارهای کنترل  $\bar{X}-R$  و  $\bar{X}-S$  است، در قالب یک مثال ارائه دادیم که نتایج زیر حاصل شده است:

۱. مدل کنشی می‌تواند با تغییر تابع مولد ARL آماره‌ی مورد استفاده، برای طراحی توأم نمودارهای کنترل به کار رود.
۲. استفاده از دو نمودار کنترل (میانگین و تغییرپذیری)، توان تشخیص تغییرات فرایند را در مقایسه با نمودار تکی افزایش می‌دهد که این کار، اثر مثبتی در کاهش هزینه دارد.
۳. به دلیل توزیع‌های به دست آمده، محاسبه‌ی متوسط مدت اجرای (ARL) توأم نمودار  $\bar{X}-R$  پیچیده‌تر از نمودار  $\bar{X}-S$  است. زیرا آماره‌ی مورد استفاده برای نمودارهای  $R$  از توزیع دامنه‌ی استاندارد شده‌ی  $w$  پیروی می‌کند که این توزیع نسبت به نمودار  $S$  که از توزیع خی دو تبعیت می‌کند، به محاسبه‌ی بیش‌تری نیاز دارد. با وجود این، از نرم‌افزار Mathcad13 برای غلبه بر مشکلات به وجود آمده، استفاده شده است.

۴. شمارش دقیق جواب قابل قبول، یک روش ساده برای یافتن پارامترهای طراحی با مینیمم هزینه است.

### توضیحات

۱. Proactive model
۲. Net Present Cost
۳. Statistical Process Control
۴. Heuristic approach
۵. متوسط مدت اجرا (ARL): ARL، متوسط تعداد نقاطی است که باید بر روی نمودار کنترل رسم گردند تا یک نقطه خارج از کنترل مشاهده شود. در واقع، در صورتی که فرایند تحت کنترل باشد،  $ARL = \frac{1}{\alpha}$  و در صورتی که فرایند خارج از کنترل باشد،  $ARL = \frac{1}{1-\beta}$  خواهد بود.  $\alpha$  و  $\beta$  به ترتیب احتمال خطای نوع اول و احتمال خطای نوع دوم هستند.
۶. متوسط زمان تا هشدار (ATS): معیار دیگری که برای ارزیابی عملکرد فرایند وجود دارد، معیار متوسط زمان تا هشدار است. این معیار بر اساس ARL محاسبه می‌گردد و تعداد مراحل زمانی مورد نیاز تا مشاهده‌ی یک هشدار بر روی نمودار کنترل را نشان می‌دهد. اگر نمونه‌ها در فاصله‌ی زمانی ثابت  $h$  تهیه گردند، آنگاه متوسط زمان تا هشدار به صورت  $ATS = h ARL$  محاسبه می‌شود.
۷. Reactive cost
۸. Process monitoring cost
۹. Product inspection cost
۱۰. Delivery schedule
۱۱. Lot size
۱۲. Delay cost per lot
۱۳. Lot delivery time
۱۴. Lot processing time
۱۵. Mean square delay
۱۶. Lot completion time

Total improvement cost	.۱۷
Realization factor	.۱۸
Total operation time per interest rate	.۱۹
Discount factor	.۲۰
Effective interest rate per time period	.۲۱

### مرجع‌ها

- [۱] بامنی مقدم، م. (۱۳۸۴). کنترل کیفیت آماری. انتشارات دانشگاه پیام نور، تهران.
- [2] Duncan, A.J. (1956). The economic design of  $\bar{X}$  charts used to maintain current control of the process, *Journal of the American Statistical Association*, 51, 228-242.
- [3] Epprecht, E.k. (2007). The joint economic optimization design of  $\bar{X}-R$  or  $\bar{X}-S$  charts: A procedure for easy implementation, *International Journal of Production Research*, 17, 31-54.
- [4] Mc Williams, T.P., Saniga, E.M., and Davis, D.J. (2001). Economic statistical design of  $\bar{X}$  and  $R$  or  $\bar{X}$  and  $S$  charts, *Journal of Quality Technology*, 33, 234-241.
- [5] Montgomery, D.C. (2001). *Introduction to Statistical Quality Control*, 4<sup>th</sup> Ed. Wiley, New York.
- [6] Pearson, E.S. and Hartley, H.O. (1942). The probability integral of the range in sample of n observation from a normal population, *Biometrika*, 32, 301-310
- [7] Saniga, E.M. (1989). Economic statistical design of control charts with an application to  $\bar{X}$  and  $R$  charts," *Technometrics*, 31, 313-320.
- [8] User Guide (2007). Mathsoft Mathcad 13 User Guide, Mathsoft Engineering and Education, Inc.
- [9] Weheba, G.S., (1996). *Economic Model for Process Improvement and Statistical Quality Control in Manufacturing system*. PhD Dissertation, University of Central Florida, Florida.

- [10] Weheba, G.S. (2004). A revised model for the cost of quality, *International Journal of Quality and Reliability Management*, **21**, 291-308.

زینب لطیفی  
کارشناس ارشد آمار  
استان خوزستان، آبادان، دانشگاه آزاد اسلامی واحد آبادان.  
رایانشانی: [Latifi.zeinab@gmail.com](mailto:Latifi.zeinab@gmail.com)

محمد بامنی مقدم  
دکتری آمار  
تهران، خیابان شهید بهشتی، نبش احمد قصیر، دانشکده‌ی اقتصاد دانشگاه علامه طباطبائی، گروه آمار.  
رایانشانی: [bamenimoghadam@aut.ac.ir](mailto:bamenimoghadam@aut.ac.ir)