

## نمودارهای کنترل چندمتغیره با نمونه‌گیری دوگانه برای پایش بردار میانگین

آسیه ثالثی\* و محمد بامنی مقدم

دانشگاه علامه طباطبائی

چکیده: در سال‌های گذشته، انواع مختلفی از روش‌های کنترل آماری چندمتغیره‌ی فرایند، برای پایش همزمان چندین مشخصه‌ی کیفیت مورد استفاده قرار گرفته است. قدیمی‌ترین روش کنترل چندمتغیره، مربوط به روش نمودار کنترل هتلینگ می‌باشد. بررسی‌های اخیر نشان می‌دهد که نمودارهای کنترل چندمتغیره با نمونه‌گیری چندگانه، نسبت به نمودار کنترل هتلینگ در شناسایی تغییرهای کوچک فرایند، بهتر عمل می‌کنند. در این مقاله، نمودارهای کنترل چندمتغیره با نمونه‌گیری دوگانه برای پایش بردار میانگین مورد بررسی قرار می‌گیرد. طراحی این نمودارها به‌عنوان مسئله‌ی بهینه‌سازی مطرح شده و به‌وسیله‌ی شبیه‌سازی منت کارلو و الگوریتم ژنتیک حل می‌گردند.

واژگان کلیدی: نمودارهای کنترل چندمتغیره؛ مشخصه‌ی کیفیت؛ نمودار کنترل چندمتغیره با نمونه‌گیری دوگانه؛ شبیه‌سازی منت کارلو؛ الگوریتم ژنتیک؛ نمودار کنترل  $T^2$  هتلینگ.

### ۱- مقدمه

امروزه، به‌علت گسترده‌ی عرصه‌ی رقابت و افزایش هزینه‌های تولید و نیز توقع مصرف‌کنندگان نسبت به کیفیت کالاها، همواره باید به دنبال راه حلی کارا برای بهبود کیفیت بود. نمودارهای کنترل ابزار سودمندی در این راستا می‌باشند [۱]. با پیچیده‌تر شدن محصول‌های تولیدی، لازم است که کیفیت محصول به‌طور همه‌جانبه در نظر گرفته شود، از این رو، مشخصه‌ی کیفیت تحت کنترل، بیش از یک مشخصه خواهد بود. بنا بر

\* نویسنده‌ی عهده‌دار مکاتبات

دریافت: ۱۳۸۸/۱۰/۳۰، پذیرش: ۱۳۸۹/۱۰/۱۲

این، همه‌ی مشخصه‌های کیفیت باید هم‌زمان با هم مطالعه شوند تا کنترل کیفیت آن محصول به‌درستی صورت گیرد. کنترل آماری چندمتغیره‌ی فرایند در طی سال‌های جنگ جهانی دوم و بعد از آن مورد توجه قرار گرفت. اولین بار هتلینگ [۳]، آماره‌ی  $T^2$  را به‌عنوان مبنایی برای نمایش کیفیت در نظر گرفت و توزیع آماری آن را برای ساختن آزمون فرض لازم ارایه داد. در صورتی‌که بین چند مشخصه‌ی کیفیت تحت کنترل، وابستگی وجود داشته باشد، استفاده از نمودارهای کنترل منفرد  $\bar{X}$  برای هر یک از مشخصه‌ها، می‌تواند به تجزیه و تحلیل‌های نادرست منجر گردد. از این رو، بناسازی نمودار کنترل  $T^2$  هتلینگ با استفاده از آماره‌ی  $T^2$  به‌عنوان راه حلی برای رفع این مشکل مفید خواهد بود [۴]. در سال‌های اخیر نمودارهای کنترل جدیدی تحت عنوان نمودارهای کنترل چندمتغیره‌ی چندگانه (MMS<sup>1</sup>)، معرفی شدند که در مقایسه با دیگر نمودارهای چندمتغیره، حساسیت بالاتری در شناسایی تغییرهای کوچک دارند. اولین بار دادین [۵] نمودار یک‌متغیره با نمونه‌گیری دوگانه را به نمودار چندمتغیره تعمیم داد. در این مقاله برای پایش بردار میانگین یکی از نمودارهای چندمتغیره با نمونه‌گیری چندگانه، که در واقع تعمیم نمودار کنترل  $\bar{X}$  با نمونه‌گیری دوگانه است معرفی می‌شود. طراحی آماری این نمودار به‌عنوان طرح مسئله‌ی بهینه‌سازی فرمول‌بندی می‌شود و برای حل چنین مسئله‌ای از شبیه‌سازی مونت کارلو و الگوریتم ژنتیک استفاده می‌گردد. در بخش دوم مروری بر نمودارهای کنترل  $T^2$  هتلینگ خواهیم داشت تا با این مقدمه‌سازی، زمینه را برای معرفی نمودار کنترل چندمتغیره با نمونه‌گیری دوگانه در بخش سوم فراهم کنیم. در بخش چهارم به طرح مسئله‌ی بهینه‌سازی مطرح‌شده می‌پردازیم و برای حل این مسئله دستورالعمل لازم را ارایه می‌دهیم. مقایسه‌ی نمودار هتلینگ و نمودار کنترل چندمتغیره با نمونه‌گیری دوگانه در بخش پنجم انجام می‌گیرد و در پایان نیز نتایج حاصل از مقایسه بیان می‌شود.

## ۲- مروری بر نمودار کنترل $T^2$ هتلینگ

در صورت وجود وابستگی بین چند مشخصه‌ی کیفیت تحت کنترل، استفاده از نمودارهای کنترل  $\bar{X}$  برای هر یک از مشخصه‌ها می‌تواند به تحلیل‌های نادرست میانگین منجر گردد [۲]. به‌طور کلی بناسازی یک نمودار کنترل چندمتغیره بر اساس دو حالت زیر خواهد بود:

حالت اول: زمانی که تمام مشخصه‌های کیفیت محصول از هم مستقل باشند.

با  $p$  مشخصه‌ی کیفیت مستقل و هر کدام با میزان خطای نوع اول  $\alpha$ ، میزان خطای نوع اول توأم به صورت  $\alpha' = 1 - (1 - \alpha)^p$  خواهد بود [۶]. بنا بر این، اگر بخواهیم خطای نوع اول را برای کل فرایند در نظر بگیریم، می‌توان از  $\alpha'$  استفاده کرده و میزان خطای نوع اول را برای هر نمودار به دست آورد و سپس حدود کنترل صحیح را برای هر مشخصه‌ی کیفیت بنا ساخت.

حالت دوم: زمانی که بین مشخصه‌های کیفیت محصول وابستگی وجود داشته باشد.

در عمل غالباً مشخصه‌های کیفیت به هم وابسته هستند. بنا بر این، نمی‌توان مانند حالت اول عمل کرد، بلکه نیاز به محاسبه‌هایی جامع‌تر و پیچیده‌تر داریم. هتلینگ آماره‌ی  $T^2$  را به عنوان راه حلی در این زمینه بیان کرد. قبل از این که به معرفی  $T^2$  هتلینگ پردازیم لازم است قضیه و نتیجه‌ی زیر را بدون اثبات بیان کنیم [۷].

قضیه‌ی ۱. اگر بردار  $m$  مولفه‌ای  $Y$  دارای توزیع  $N(\mu, \Sigma)$  (نامنفرد) باشد، آن‌گاه  $Y' \Sigma^{-1} Y$  دارای توزیع  $\chi^2$  با  $m$  درجه آزادی و پارامتر غیر مرکزی  $\mu' \Sigma^{-1} \mu$  می‌باشد. اگر  $\mu = 0$  باشد، آن‌گاه این توزیع به توزیع  $\chi^2$  مرکزی تبدیل می‌شود.

نتیجه‌ی ۱. اگر  $\bar{X}$  میانگین نمونه‌ی تصادفی گرفته شده از توزیع  $N(\mu, \Sigma)$  باشد، آن‌گاه  $n(\bar{X} - \mu_0)' \Sigma^{-1} (\bar{X} - \mu_0)$  توزیع  $\chi^2$  نامرکزی با  $p$  درجه آزادی و پارامتر غیر مرکزی  $n(\mu - \mu_0)' \Sigma^{-1} (\mu - \mu_0)$  دارد که در آن  $\mu_0$  یک بردار ثابت می‌باشد.

فرض کنید  $X_1, X_2, \dots, X_m$  بردارهای تصادفی  $p \times 1$  بعدی مشاهده‌ها هستند. هر بردار تصادفی شامل  $p$  مشخصه‌ی کیفیت است که به طور هم‌زمان باید کنترل شوند و با فرض تحت کنترل بودن فرایند، این مشخصه‌ها توزیع نرمال  $p$  متغیره با بردار میانگین  $\mu$  و ماتریس واریانس-کواریانس  $\Sigma$  دارند. بردار  $\bar{X}_i = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m X_{ij}$  بیانگر  $i$  امین بردار میانگین نمونه است، که در آن  $X_{ij}$  به صورت  $i$  امین مشخصه‌ی کیفیت از  $j$  امین نمونه، قابل تعریف می‌باشد. آماره‌ی معرفی شده‌ی هتلینگ به صورت زیر می‌باشد:

$$(۱) \quad T_i^2 = n(\bar{X}_i - \mu_0)' \Sigma^{-1} (\bar{X}_i - \mu_0)$$

از آنجا که ماتریس  $\Sigma$  معلوم است، آماره‌ی فوق دارای توزیع خی دو با  $p$  درجه‌ی آزادی است. بنا بر این، حد بالای کنترل برای نمودار را می‌توان نقطه‌ی  $(100 \times \alpha)$  درصدی توزیع خی دو در نظر گرفت.

$$UCL = \chi_{\alpha}^2(p)$$

علت انتخاب  $\chi_{\alpha}^2(p)$  به‌عنوان حد بالای کنترل این است که، وقتی فرایند تحت کنترل است با احتمال  $\alpha$ ، آماره‌ی  $T_i^2$  بالای مقدار بحرانی خواهد افتاد [۸]. فرضی که در این‌جا مورد آزمون قرار می‌گیرد به‌صورت  $H_0: \mu_i = \mu_0$  در مقابل  $H_1: \mu_i \neq \mu_0$  خواهد بود. گاهی ماتریس  $\Sigma$  نامعلوم است، بنا بر این باید برآورد شود. ولی در این مقاله با فرض معلوم بودن  $\Sigma$  کار می‌کنیم. از این‌رو، گاهی برای تمایز با حالت  $\Sigma$  نامعلوم، نمودار کنترل  $T^2$  را نمودار کنترل  $\chi^2$  می‌نامند. اساس کار نمودار کنترل  $\chi^2$  از این قرار است که ابتدا نمونه‌هایی به اندازه‌ی  $n$  از فرایند می‌گیریم. سپس مقدار آماره‌ی (۱) را برای هر نمونه به دست می‌آوریم و مقدار  $T_i^2$  را در نمودار کنترل با  $UCL = \chi_{\alpha}^2(p)$  رسم می‌کنیم. هرگاه مقادیر آماره‌ی نمونه‌ی  $T_i^2$ ، زیر حد کنترل UCL رسم شوند، فرایند تحت کنترل است. حال اگر  $\mu_i \neq \mu_0$  باشد، آماره‌ی  $T_i^2$  دارای توزیع  $\chi^2$  غیر مرکزی با پارامتر غیر مرکزی  $d = n\lambda^2$  است، به‌طوری‌که:

$$\lambda = \sqrt{(\mu_i - \mu_0)' \Sigma^{-1} (\mu_i - \mu_0)}$$

معرف فاصله‌ی ماهالانوبیس بین بردارهای میانگین تحت کنترل و خارج از کنترل است. از این رو توان نمودار  $\chi^2$ ، تنها به اندازه‌ی نمونه و فاصله‌ی ماهالانوبیس بستگی دارد [۸].

### ۳- نمودار کنترل چندمتغیره با نمونه‌گیری دوگانه برای کنترل بردار میانگین فرایند

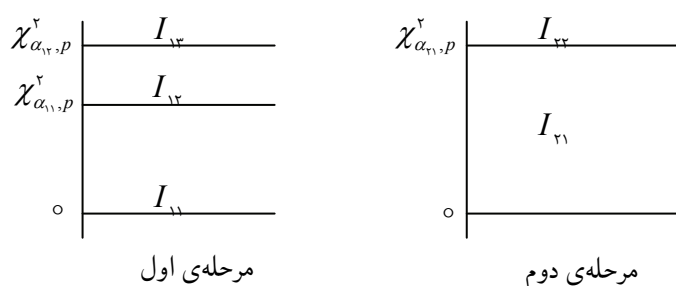
علاوه بر نمودار کنترل  $\chi^2$  هتلینگ برای پایش بردار میانگین، نمودارهای چندمتغیره‌ی دیگری در این زمینه توسعه یافتند که از جمله‌ی آن‌ها می‌توان به نمودارهای چندمتغیره با

نمونه‌گیری چندگانه یا MMS، اشاره کرد. هی و گریگورین [۹] بعد از دادین این طرح جدید کنترل آماری فرایند چندمتغیره‌ی را توسعه داد. اساس کار نمودارهای کنترل چندگانه، به‌صورت قاعده‌ی تصمیم‌گیری در چندمرحله نمونه‌گیری است. به‌عنوان مثال در نمودار کنترل دوگانه، باید دو مرحله نمونه‌گیری داشته باشیم که نوع تصمیم‌گیری ما بر اساس قرار گرفتن آماره‌ی نمونه در نواحی مختلف نمودار کنترل، متفاوت خواهد بود. در این مقاله به بررسی نمودار چندمتغیره با نمونه‌گیری دوگانه، که به‌صورت  $MMS^2$  معرفی می‌شود می‌پردازیم. در واقع، این نمودار تعمیم نمودار کنترل  $\bar{X}$  با نمونه‌گیری دوگانه است که ساده‌ترین شکل نمودارهای MMS می‌باشد. فرض کنید  $\chi_{\alpha_{r,p}}^2$  و  $\chi_{\alpha_{1,p}}^2$  حدود کنترل نمودار  $MMS^2$  در اولین مرحله و  $\chi_{\alpha_{1,p}}^2$  حد کنترل نمودار در مرحله‌ی دوم نمونه‌گیری باشد ( $\alpha_{r1}$  و  $\alpha_{11}$  و  $\alpha_{r2}$  خطاهای نوع اول در مرحله‌ی اول و دوم نمونه‌گیری بوده که توسط طراح تعیین می‌گردند). نمودار  $MMS^2$  به‌صورت ترسیمی در شکل ۱ معرفی شده است [۸].

روش اجرای نمودار کنترل  $MMS^2$  به‌صورت زیر می‌باشد:

گام اول: ابتدا نمونه‌ی اولیه با اندازه‌ی  $n_1$  گرفته شده و آماره‌ی نمونه  $X_1 = n_1 \Delta X_1' \Sigma^{-1} \Delta X_1$  محاسبه می‌شود که  $\Delta X_1'$  به‌صورت زیر معرفی می‌گردد:

$$\Delta X_1' = [\bar{x}_{11} - \mu_{10}, \bar{x}_{r1} - \mu_{r0}, \dots, \bar{x}_{i1} - \mu_{i0}, \dots, \bar{x}_{p1} - \mu_{p0}]$$



شکل ۱- نمایش نمودار کنترل  $MMS^2$

و میانگین  $\bar{x}_{i1} = \frac{1}{n_1} \sum_{j=1}^{n_1} x_{ij}$  از آمین متغیر در مرحله‌ی اول است و مقدار  $x_{ij}$

مشاهده‌ی  $j$  آمین واحد نمونه از  $i$  آمین متغیر است.

گام دوم: اگر  $X_1$  در ناحیه‌ی  $I_{11}$  قرار بگیرد، یعنی  $0 \leq X_1 \leq \chi_{\alpha_{11}, p}^2$ ، آن‌گاه گفته می‌شود که فرایند تحت کنترل است.

گام سوم: اگر  $X_1$  در ناحیه‌ی  $I_{12}$  قرار بگیرد، یعنی  $X_1 > \chi_{\alpha_{12}, p}^2$ ، آن‌گاه گفته می‌شود، فرایند خارج از کنترل است.

گام چهارم: اگر  $X_1$  در ناحیه‌ی  $I_{13}$  قرار بگیرد، یعنی  $\chi_{\alpha_{11}, p}^2 < X_1 \leq \chi_{\alpha_{12}, p}^2$ ، آن‌گاه نمونه‌ی دومی با اندازه‌ی  $n_2$  می‌گیریم و آماری نمونه‌ی زیر را محاسبه می‌کنیم:

$$X_2 = (n_1 + n_2) \Delta X_2' \Sigma^{-1} \Delta X_2$$

که  $\Delta X_2'$  به صورت زیر معرفی می‌شود:

$$\Delta X_2' = \left[ \begin{array}{c} \frac{n_1 \bar{x}_{11} + n_2 \bar{x}_{12}}{n_1 + n_2} - \mu_{10}, \frac{n_1 \bar{x}_{21} + n_2 \bar{x}_{22}}{n_1 + n_2} - \mu_{20}, \dots, \frac{n_1 \bar{x}_{i1} + n_2 \bar{x}_{i2}}{n_1 + n_2} - \mu_{i0}, \\ \dots, \frac{n_1 \bar{x}_{p1} + n_2 \bar{x}_{p2}}{n_1 + n_2} - \mu_{p0} \end{array} \right]$$

و میانگین  $\bar{x}_{i2} = \frac{1}{n_2} \sum_{j=1}^{n_2} x_{ij}$  از آمین متغیر در مرحله‌ی دوم است.

گام پنجم: اگر  $X_2$  در ناحیه‌ی  $I_{21}$  قرار بگیرد یعنی  $0 \leq X_2 \leq \chi_{\alpha_{21}, p}^2$  باشد آن‌گاه فرایند تحت کنترل است، در غیر این صورت فرایند خارج از کنترل نامیده می‌شود.

روش اجرای این نمودار، برای هر نمودار MMS با دو مرحله و بیش‌تر از دو مرحله نمونه‌گیری قابل تعمیم است.

#### ۴- طراحی آماری نمودار کنترل $MMS^2$

طراحی آماری نمودارهای  $MMS^2$  به‌عنوان طرح مسئله‌ی بهینه‌سازی فرمول‌بندی شده و روش کلی برای حل چنین مسئله‌ای شبیه‌سازی مونت کارلو و الگوریتم ژنتیک خواهد بود [۱۰]. طراحی آماری نمودار  $MMS^2$  شامل تعیین مقادیر بهینه‌ی پارامترهای  $\alpha_{11}$ ،  $\alpha_{12}$ ،  $\alpha_{21}$ ،  $\alpha_{22}$  و  $n_1$  و  $n_2$  در نمودار می‌باشد. فرمول‌بندی مسئله‌ی بهینه‌سازی نمودار  $MMS^2$  به‌صورت زیر است:

$$(2) \quad \min_{n_1, n_2, \alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{22}} E(N) = n_1 + n_2 p[x_1 \in I_{12} | \mu = \mu_0]$$

به شرط:

$$(3) \quad p[\mu = \mu_0 \text{ خارج از کنترل بودن فرایند}] \leq \alpha$$

$$(4) \quad p[\mu = \mu_1 \text{ تحت کنترل بودن فرایند}] \leq \beta$$

تابع هدف بهینه‌سازی، مینیمم کردن میانگین اندازه‌ی نمونه‌ی  $E(N)$  در شرایط تحت کنترل است. شرط (۳) بیان می‌کند که احتمال هشدار نادرست نباید از مقدار تعیین شده‌ی  $\alpha$  تجاوز کند و شرط (۴) اعلام می‌کند که احتمال شناسایی نکردن تغییر، نباید از مقدار معین  $\beta$  بیش‌تر شود. از طرف دیگر می‌توان مسئله‌ی بهینه‌سازی را با جایگزین کردن مینیمم متوسط مدت اجرا  $ARL^1$  (Average Run Length) تحت شرایط خارج از کنترل انجام داد، که متوسط مدت اجرا (ARL) یک نمودار، برابر میانگین تعداد نقاطی است که در نمودار کنترل رسم می‌شود، قبل از این که یک نقطه خارج از کنترل قرار بگیرد. در صورتی که فرایند خارج از کنترل باشد،  $ARL = \frac{1}{1-\beta}$  است، که در آن،  $\beta$  احتمال خطای نوع دوم می‌باشد. در این حالت فرمول‌بندی طرح آماری مسئله‌ی بهینه‌سازی به‌صورت زیر خواهد بود.

$$(5) \quad \min_{n_1, n_2, \dots, n_N, \alpha_{11}, \alpha_{12}, \dots, \alpha_{N-1,1}, \alpha_{N-1,2}, \dots, \alpha_{N,1}} ARL$$

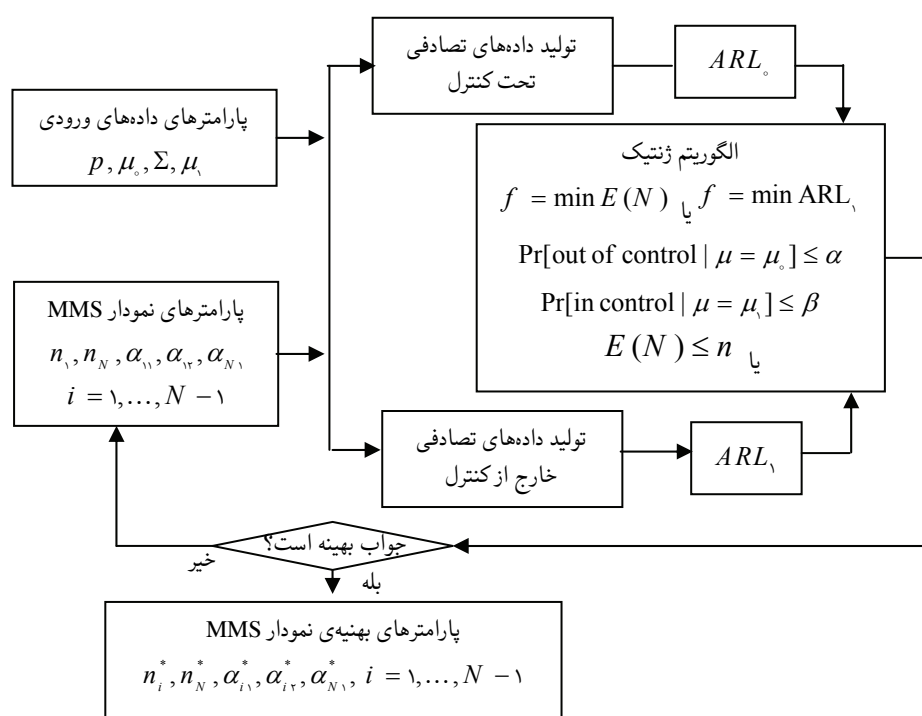
به شرط:

$$(6) \quad p[\mu = \mu_0 \text{ خارج از کنترل بودن فرایند}] \leq \alpha$$

$$n_1 + n_2 p[X_1 \in I_{1,r} / \mu = \mu_0] + \dots + n_N p[X_{N-1} \in I_{N-1,r} / \mu = \mu_0] \leq n$$

(۷)

تابع هدف (۵)، ARL را در شرایط خارج از کنترل برای تغییر معین مینیمم می‌کند. شرط (۶) همانند شرط (۳) می‌باشد و شرط (۷) بیان می‌کند که میانگین اندازه‌ی نمونه در شرایط تحت کنترل نباید از مقدار مشخص  $n$  تجاوز کند. اگر از روش‌های خطی استاندارد برای حل این مسئله استفاده شود، با محاسبات پیچیده‌ای رو به رو خواهیم شد. بنا بر این، استفاده از شبیه‌سازی مونت کارلو و روش طراحی الگوریتم ژنتیک در این زمینه کارا خواهد بود. فلوجارت روش بهینه‌سازی الگوریتم ژنتیک و شبیه‌سازی مونت کارلو در شکل ۲ نشان داده شده است.



شکل ۲- فلوجارت روش بهینه‌سازی الگوریتم ژنتیک و شبیه‌سازی مونت کارلو



روش بهینه‌سازی طرح الگوریتم ژنتیک و شبیه‌سازی مونت کارلو با مجموعه‌ای از پارامترهای داده‌های ورودی و پارامترهای نمودار شروع می‌شود. پارامترهای داده‌های ورودی شامل بردار میانگین تحت کنترل، کوواریانس  $\Sigma$  و بردار میانگین خارج از کنترل می‌باشند. مقادیر  $ARL_0$  و  $ARL_1$  با استفاده از شبیه‌سازی مونت کارلو به دست می‌آیند. به این صورت که تعداد زیادی نمونه، به صورت تصادفی از توزیع آماری نمونه تولید می‌شود و تعداد دفعاتی که آماری نمونه درون حدود کنترل قرار می‌گیرد، قبل از این که یکی از آن‌ها خارج از حدود کنترل قرار بگیرد، حساب می‌شود. مقدار متوسط محاسبه‌شده‌ی این مقادیر، برابر با متوسط مدت اجرای نمودار است. همه‌ی داده‌های جدول‌های ۱ و ۲ برای نمودارهای MMS، با استفاده از شبیه‌سازی مونت کارلو و به وسیله‌ی نرم‌افزار MATLAB به دست آمده است [۱۰].

#### ۵- مقایسه‌ی نمودار کنترل $MMS^2$ با نمودار $T^2$ هتلینگ

در این قسمت عملکرد نمودار کنترل  $MMS^2$  مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. به این منظور کارایی آماری این نمودار با نمودار  $T^2$  هتلینگ مقایسه می‌شود. روشی که برای مقایسه‌ی نمودار  $MMS^2$  با نمودار  $T^2$  هتلینگ، استفاده می‌شود همان روشی است که دادین در مقایسه‌ی نمودار  $\bar{x}$  با نمونه‌گیری دوگانه در مقابل نمودار  $\bar{x}$  شوهارت انجام داده است. یعنی میانگین اندازه‌ی نمونه  $MMS^2$  و نمودار  $T^2$  هتلینگ زمانی که فرایند تحت کنترل است، محاسبه می‌شود [۱۰]. این دو نوع نمودار روی دو نقطه‌ی ARL زیر، جفت شده‌اند.

$$ARL_1 = 5/263 \quad (\beta = 0/81) \quad ARL_0 = 200 \quad (\alpha = 0/005)$$

این دو نمودار وقتی که ۳ و ۱۰ مشخصه‌ی کیفیت داشته باشیم با هم مقایسه شده‌اند و نتایج این مقایسه در جدول‌های ۱ و ۲ ارایه شده است. با توجه به جدول‌های ۱ و ۲ خواهیم دید که نمودار MMS با دو مرحله نمونه‌گیری ( $MMS^2$ ) نسبت به نمودار  $T^2$  هتلینگ برای شناسایی تغییرهای کوچک، بهبود معناداری در کارایی آماری ایجاد می‌کند. زیرا برای هر مقدار از  $\lambda$ ، متوسط اندازه‌ی نمونه‌ی نمودار  $MMS^2$  از اندازه‌ی نمونه‌ی نمودار  $T^2$  هتلینگ، کمتر می‌باشد. البته

جدول ۱- مقایسه‌ی نمودار  $MMS^T$  با نمودار  $T^T$  هتلینگ ( $p = 3$ )

$n_1$	$n_2$	$\alpha_{11}$	$\alpha_{12}$	$\alpha_{21}$	$d$	$\lambda$	$E(N)$	اندازه‌ی نمونه‌ی $T^T$ هتلینگ
۱۱	۷۰	۰/۰۲۹	۰/۰۰۲۱	۰/۰۴۲	۰/۲۸۹	۰/۵	۱۲۸۷۵۳	۲۲
۲	۱۸	۰/۰۵۳	۰/۰۵۳	۰/۰۲۳	۰/۵۷۷	۱	۲۹۱	۶
۱	۱۵	۰/۰۵۶	۰/۰۰۲۵۴	۰/۰۳۵	۰/۸۶۶	۱/۵	۱۸۰۱۴	۳
۱	۲۱	۰/۰۲	۰/۰۰۲۵۶	۰/۰۶۷	۱/۱۵۵	۲	۱۲۲۷	۲
—	—	—	—	—	۱/۴۴۳	۲/۵	—	۱
—	—	—	—	—	۱/۷۳۲	۳	—	۱

جدول ۲- مقایسه‌ی نمودار  $MMS^T$  با نمودار  $T^T$  هتلینگ ( $p = 10$ )

$n_1$	$n_2$	$\alpha_{11}$	$\alpha_{12}$	$\alpha_{21}$	$d$	$\lambda$	$E(N)$	اندازه‌ی نمونه‌ی $T^T$ هتلینگ
۱۸	۵۶	۰/۰۵۴	۰/۰۰۱۷	۰/۰۲	۰/۱۵۸	۰/۵	۲۰۸۲	۳۵
۴	۲۷	۰/۰۴۴	۰/۰۰۳	۰/۰۲۸	۰/۳۱۶	۱	۵۱۰۰۷	۹
۲	۱۶	۰/۰۳۲	۰/۰۰۲۲	۰/۰۲۵	۰/۴۷۴	۱/۵	۲۴۸	۴
۱	۵	۰/۰۶	۰/۰۰۱۹	۰/۰۲۶	۰/۶۳۲	۲	۱۲۹	۲
۱	۱	۰/۰۵۴	۰/۰۰۱۷	۰/۰۲	۰/۷۹۱	۲/۵	۱	۲
—	—	—	—	—	۱/۷۳۲	۳	—	۱

میزان بهبود  $p = 10$  معناداری بیش‌تری نسبت به  $p = 3$  دارد. هر چقدر مقدار  $\lambda$  افزایش یابد، بهبود کارایی  $MMS^T$  نسبت به نمودار  $T^T$  هتلینگ کمتر می‌شود. زمانی که مقدار  $\lambda$  تا سطح معینی افزایش یابد، کارایی نمودار  $MMS^T$  بهتر از نمودار  $T^T$  نخواهد بود. بنا بر این، هر چه تغییرها بزرگ‌تر شوند، سرعت بهبود در کارایی فرایند نمودار  $MMS^T$  کم می‌شود. توجه کنید، زمانی که در جدول ۱،  $\lambda \geq 2/5$  و در جدول ۲،  $\lambda \geq 3$  باشد، اندازه‌ی نمونه برای شناسایی تغییرها در نمودار  $T^T$  باید ۱ باشد. در چنین حالتی، می‌دانیم که میانگین اندازه‌ی نمونه‌ی نمودار  $MMS^T$  نباید کمتر از ۱ باشد. بنا بر این، همان‌طور که در جدول‌های ۱ و ۲ نشان داده شده، نمودار  $MMS^T$  تولید نشده است.

## ۶- خلاصه و نتیجه‌گیری

در این مقاله نمودار کنترل چندمتغیره با نمونه‌گیری دوگانه ( $MMS^2$ ) معرفی و بررسی شد که طراحی آماری این نمودار به‌عنوان مسئله‌ی بهینه‌سازی مطرح گردد. مسئله‌ی بهینه‌سازی مطرح‌شده، مینیمم‌سازی متوسط مدت اجرا (ARL) فرایند در شرایط تحت کنترل با شرط‌های مفروض می‌باشد. این نمودار با نمودار  $T^2$  هتلینگ مقایسه گردید. نتایج حاصل از مقایسه نشان می‌دهد که هر چه تغییرهای فرایند کوچک‌تر باشد، نمودار  $MMS^2$  نسبت به نمودار  $T^2$  هتلینگ دارای کارایی بالاتری خواهد بود، در حالی که در مورد تغییرهای بزرگ کارایی دو نمودار به هم نزدیک‌تر می‌شود. نتایج این مقاله را می‌توان به نمودار  $MMS$  با بیش از یک مرحله نمونه‌گیری نیز تعمیم داد و یا می‌توان روی نمودارهای چند متغیره با نمونه‌گیری چندگانه پراکندگی فرایند را مورد مطالعه قرار داد. البته این‌گونه نمودارهای کنترل مقرون به صرفه نمی‌باشند و بهتر است در زمانی که دقت نسبت به هزینه در اولویت قرار دارد، مورد استفاده قرار گیرند.

## توضیحات

### 1. Multivariate Multiple Sampling

۲. ARL، متوسط تعداد نقاطی است که باید بر روی نمودار کنترل رسم گردند تا یک نقطه خارج از کنترل مشاهده شود. در واقع، در صورتی که فرایند تحت کنترل باشد،  $ARL = \frac{1}{\alpha}$  و در صورتی که فرایند خارج از کنترل باشد،  $ARL = \frac{1}{1-\beta}$  خواهد بود.  $\alpha$  و  $\beta$  به ترتیب احتمال خطای نوع I و احتمال خطای نوع II هستند.

## مرجع‌ها

- [۱] بامنی مقدم، محمد (۱۳۸۵). کنترل کیفیت آماری، چاپ دوم، انتشارات دانشگاه پیام نور، تهران.
- [۲] مونته‌گومری، داگلاس سی. (۱۳۷۷). کنترل کیفیت آماری، رسول نورالسنا (مترجم)، ترجمه از نسخه انگلیسی، ج ۱، چاپ دوم، انتشارات دانشگاه علم و صنعت، تهران.

- [3] Hotelling, H. (1947). Multivariate Quality Control – Illustrated by Air Testing of Sample Bombsights. *Techniques of Statistical Analysis*, New York, Mc Graw Hill, 111-184.
- [4] Faraz, A. and Parsian, A. (2006). Hotelling's  $T^2$  Control Chart with Double Warning Lines. *Statistical Papers*, **47**, 569-593.
- [5] Daudin, J.J. (1992). Double Sampling  $\bar{x}$  Charts. *Journal of Quality Technology*, **24**, 78-87.
- [6] Aparisi, F. and Haro, S. (2001). Hotelling's  $T^2$  Control Chart with Variable Sampling Intervals. *International Journal of Production Research*, **39**, 3127-3140.
- [7] Anderson, T.W. (1984). An Introduction to Multivariate Statistical Analysis. 2<sup>th</sup> Ed. Wiley, New York.
- [8] He, D. and Grigoryan, A. (2006). Joint Statistical Design of Double Sampling X-bar and S Charts. *European Journal of Operational Research*, **168**, 122-142.
- [9] He, D. and Grigoryan, A. (2003). An Improved Double Sampling S-chart. *International Journal of Production Research*, **41**, 2663-2679
- [10] He, D., Grigoryan, A. and Sigh, M. (2002). Design of Double and Triple-Sampling X-bar Control Charts Using Genetic Algorithms. *International Journal of Production Research*, **40**, 1387-1404.

آسیه ثالثی

کارشناس ارشد آمار

تهران، خیابان شهید بهشتی، نبش احمد قصیر، دانشکده‌ی اقتصاد دانشگاه علامه طباطبایی، گروه آمار.

رایانشانی: a.salesi98@gmail.com

محمد بامنی مقدم

دکتری آمار

تهران، خیابان شهید بهشتی، نبش احمد قصیر، دانشکده‌ی اقتصاد دانشگاه علامه طباطبایی، گروه آمار.

رایانشانی: bamenimoghadam@aut.ac.ir