

کارایی برآوردها در توزیع وایبول

شهرام یعقوب‌زاده شهرستانی

گروه آمار دانشگاه پیام نور

چکیده: در این مقاله برآورد ماکسیمم درستنمایی^۱ و برآورد ناریب با کم‌ترین واریانس به‌طور یکنواخت^۲ تابع چگالی احتمال و تابع توزیع تجمعی توزیع وایبول را به‌دست می‌آوریم و سپس با استفاده از شبیه‌سازی مونت‌کارلو و یک مجموعه داده‌های واقعی با محاسبه‌ی میانگین مربع خطای^۳ برآوردها به مقایسه‌ی آن‌ها می‌پردازیم.

واژگان کلیدی: توزیع وایبول؛ برآوردها ماکسیمم درستنمایی؛ برآورد ناریب با کم‌ترین واریانس به‌طور یکنواخت؛ تابع چگالی احتمال؛ تابع توزیع تجمعی؛ میانگین مربع خطا؛ شبیه‌سازی مونت‌کارلو.

۱- مقدمه

توزیع وایبول که به‌وسیله‌ی یک فیزیکدان سوئدی به نام وایبول [۱۳] معرفی شد. امروزه متداول‌ترین مدل مورد استفاده در مطالعات قابلیت اطمینان، طول عمر و کنترل کیفیت و به‌طور وسیعی در شاخه‌های مختلف علوم از جمله پزشکی و مهندسی مورد استفاده قرار می‌گیرد. برای تعیین مدل مناسب آماری به داده‌ها و تجزیه و تحلیل‌های مربوط، لازم است که در ابتدا همه‌ی توزیع‌هایی که می‌تواند به‌عنوان توزیع طول عمر داده‌ها به کار روند، را مورد بررسی قرار داد و مناسب‌ترین توزیع را انتخاب کرد. با شناخت توزیع مهم‌ترین استنباط‌های آماری در رابطه با پارامتر مدل‌های مورد استفاده، برآورد آن‌ها و انجام آزمون در مورد آن پارامترها است که توزیع وایبول نقش مهمی در این راستا ایفا می‌کند. دلیل اهمیت این توزیع، کاربرد آن برای مدل‌بندی زمان‌های شکست و توزیع تابع طول عمر داده‌ها و رفتار تابع نرخ مخاطره‌ی آن است که با تغییر پارامترهای آن می‌تواند تابعی صعودی، نزولی یا ثابت باشد و به خاطر رفتار تابع نرخ شکست آن، این توزیع برای

دریافت: ۱۳۹۳/۱۱/۹، پذیرش: ۱۳۹۴/۱۰/۳۰.

الگوسازی داده‌های مختلف، دارای انعطاف پذیری زیادی است. همچنین می‌توان به کاربردهای توزیع وایبول در مباحث قابلیت اعتماد و آزمون‌های مربوط به طول عمر مانند وایبول [۱۴]، لیلین و زلن [۱۰] و کائو [۸، ۹]، برتونی [۳] و مان [۱۱] اشاره کرد. به همین دلایل برآورد تابع چگالی احتمال و تابع توزیع تجمعی وایبول پیشنهاد می‌شود. اخیراً نویسندگان مختلفی به برآورد تابع چگالی احتمال و تابع توزیع تجمعی توزیع‌های طول عمر پرداخته‌اند که می‌توان به دیکسیت و جباری نوقابی [۶]، جباری نوقابی و جباری نوقابی [۷]، باقری و دیگران [۴]، علیزاده و دیگران [۲] و باقری و دیگران [۵] اشاره کرد. در این مقاله در بخش‌های دوم و سوم به ترتیب برآورد ماکسیمم درستنمایی و برآورد نارایب با کم‌ترین واریانس به‌طور یکنواخت تابع توزیع تجمعی و تابع چگالی احتمال توزیع وایبول و میانگین مربع خطای آن‌ها را به‌دست می‌آوریم. در بخش چهارم با استفاده از شبیه‌سازی مونت‌کارلو و یک مجموعه داده‌های واقعی به مقایسه‌ی این برآوردها پرداخته و نتایج را نیز در بخش پنجم بیان می‌کنیم.

۲- برآورد ماکسیمم درستنمایی

اگر X یک متغیر تصادفی و دارای توزیع وایبول با پارامترهای α (معلوم) و β باشد. آنگاه تابع چگالی احتمال و تابع توزیع تجمعی آن به‌ترتیب عبارت است از:

$$(۱) \quad f(x) = \alpha \beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-(\beta x)^\alpha}, \quad x > 0, \alpha > 0, \beta > 0$$

$$(۲) \quad F(x) = 1 - e^{-(\beta x)^\alpha}, \quad x > 0$$

اگر $X_1, X_2, \dots, X_n$ یک نمونه‌ی تصادفی از توزیع وایبول باشد، آنگاه برآورد ماکسیمم

درستنمایی β برابر است با $\tilde{\beta} = \left(n / \sum_{i=1}^n X_i^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}}$ که با توجه به خاصیت پایایی برآوردهای ماکسیمم درستنمایی، برآورد ماکسیمم درستنمایی $f(x)$ و $F(x)$ به‌ترتیب برابر است با

$$(۳) \quad \tilde{f}(x) = \alpha \tilde{\beta}^\alpha x^{\alpha-1} e^{-(\tilde{\beta} x)^\alpha}, \quad x > 0, \alpha, \tilde{\beta} > 0$$

$$(۴) \quad \tilde{F}(x) = 1 - e^{-(\tilde{\beta} x)^\alpha}, \quad x > 0, \alpha, \tilde{\beta} > 0$$

اکنون میانگین مربع خطای $\tilde{\beta}$ و $\tilde{f}(x)$ و $\tilde{F}(x)$ را به دست می آوریم. با فرض $S = \sum_{i=1}^n X_i^\alpha$ تابع چگالی احتمال S برابر است با

$$(۵) \quad g(s) = \frac{\beta^{n\alpha} s^{n-1} e^{-\beta^\alpha s}}{\Gamma(n)}, \quad s > 0.$$

در نتیجه تابع چگالی احتمال $W = \tilde{\beta}$ عبارت است از:

$$(۶) \quad g_W(w) = \frac{n^n \alpha \beta^{n\alpha}}{\Gamma(n) w^{n\alpha+1}} e^{-n\left(\frac{\beta}{w}\right)^\alpha}, \quad w > 0.$$

بنا بر این داریم:

$$E(W^r) = \frac{n^\alpha \Gamma(n - \frac{r}{\alpha})}{\Gamma(n)} \beta^r$$

در نتیجه میانگین مربع خطای $\tilde{\beta}$ برابر است با:

$$(۷) \quad MSE(\tilde{\beta}) = \frac{n^\alpha \Gamma(n - \frac{2}{\alpha}) - 2n^\alpha \Gamma(n - \frac{1}{\alpha}) + \Gamma(n)}{\Gamma(n)} \beta^2$$

قضیه ۱. گشتاورهای مرکزی مرتبه r ام، $\tilde{f}(x)$ و $\tilde{F}(x)$ به ترتیب عبارت اند از:

(الف)

$$E[(\tilde{f}(x))^r] = \frac{\alpha^r}{x^r \Gamma(n)} \sum_{j=0}^{n-r-1} \frac{(-r)^j [n(\beta x)^\alpha]^{j+r}}{j!} \Gamma(n-r-j)$$

(ب)

$$E[(\tilde{F}(x))^r] = \frac{1}{\Gamma(n)} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^r \frac{\binom{r}{i} (-1)^i i^j [n(\beta x)^\alpha]^j}{j!} \Gamma(n-j)$$

اثبات: حالت (الف) با توجه به رابطه $e^{-(wx)^\alpha} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j (wx)^\alpha j}{j!}$ داریم:

$$E\left[\left(\tilde{f}(x)\right)^r\right] = \frac{\alpha^r}{x^r} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-r)^j x^{\alpha(j+r)}}{j!} E(W^{\alpha(j+r)})$$

با توجه به تابع چگالی W و به کمک تغییر متغیر $u = n\left(\frac{\beta}{w}\right)^\alpha$ و با توجه به تعریف تابع گاما داریم:

$$\begin{aligned} E\left[\left(\tilde{f}(x)\right)^r\right] &= \frac{\alpha^r}{x^r \Gamma(n)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-r)^j [n(\beta x)^\alpha]^{j+r}}{j!} \int_0^\infty u^{n-r-j-1} e^{-u} du \\ &= \frac{\alpha^r}{x^r \Gamma(n)} \sum_{j=0}^{n-r-1} \frac{(-r)^j [n(\beta x)^\alpha]^{j+r}}{j!} \Gamma(n-r-j) \end{aligned}$$

برای قسمت (ب) با توجه به بسط دوجمله‌ای خیام نیوتن و رابطه‌ی $e^{-(wx)^\alpha} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j (wx)^\alpha j}{j!}$ داریم:

$$\begin{aligned} E\left[\left(\tilde{F}(x)\right)^r\right] &= \sum_{i=0}^r \binom{r}{i} (-1)^i \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-i)^j x^{\alpha j}}{j!} E(W^{\alpha j}) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^r \frac{\binom{r}{i} (-1)^{i+j} x^{\alpha j}}{j!} E(W^{\alpha j}) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n)} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^r \frac{\binom{r}{i} (-1)^{i+j} [n(\beta x)^\alpha]^j}{j!} \Gamma(n-j). \end{aligned}$$

قضیه ۰۲. میانگین مربع خطای $\tilde{f}(x)$ و $\tilde{F}(x)$ به ترتیب برابر است به:

(الف)

$$\begin{aligned}
 MSE(\tilde{f}(x)) &= \frac{\alpha^2}{x^2 \Gamma(n)} \sum_{j=0}^{n-2} \frac{(-2)^j [n(\beta x)^\alpha]^{j+2}}{j!} \Gamma(n-j-2) \\
 &\quad - \frac{2\alpha^2 (\beta x)^\alpha e^{-(\beta x)^\alpha}}{x^2 \Gamma(n)} \sum_{j=0}^{n-2} \frac{(-1)^j [n(\beta x)^\alpha]^{j+1}}{j!} \Gamma(n-j-1) \\
 &\quad - 1 + \left(\alpha \beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-(\beta x)^\alpha} \right)^2
 \end{aligned}
 \tag{ب}$$

$$\begin{aligned}
 MSE(\tilde{F}(x)) &= \frac{2}{\Gamma(n)} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\left(2^{j-1} - e^{-(\beta x)^\alpha} \right)^j [n(\beta x)^\alpha]^j}{j!} \Gamma(n-j) \\
 &\quad + \left(1 - e^{-(\beta x)^\alpha} \right)^2
 \end{aligned}$$

اثبات: با در نظر گرفتن $r = 1, 2$ در قضیه ۱ و به کمک رابطه‌ی زیر به راحتی قضیه ۲ ثابت می‌شود.

$$MSE(\tilde{f}(x)) = E\left[\left(\tilde{f}(x)\right)^2\right] - 2f(x)E(\tilde{f}(x)) + [f(x)]^2$$

۳- برآوردهای نااریب با کمترین واریانس

اگر $X_1, X_2, \dots, X_n$ یک نمونه‌ی تصادفی از توزیع وایبول با تابع چگالی احتمال $f(x)$ و $S = \sum_{i=1}^n X_i^\alpha$ یک آماره‌ی بسنده و کامل پارامتر نامعلوم β و تابع چگالی شرطی X_n بشرط S ، $h(X_n|S) = f^*(S)$ باشند، آنگاه داریم:

$$E(f^*(S)) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x_n|s)g(s)ds = \int_{-\infty}^{\infty} g(x_n, s)ds = f(x_n)$$

که در آن $g(s)$ و $g(X_n, s)$ به ترتیب تابع چگالی احتمال S و تابع چگالی احتمال توأم X_n و S است. بنا بر این $f^*(S)$ براورد ناریب با کمترین واریانس $f(x)$ است.

قضیه ۳. براورد ناریب با کمترین واریانس $f(x)$ برابر است با:

$$\hat{f}(x) = \frac{\alpha(n-1)x^{\alpha-1}(s-x^\alpha)^{n-2}}{s^{n-1}}$$

به طوری که $s^{-\frac{1}{\alpha}} < x < s$ و s مقدار مشاهده x_i^α $S = \sum_{i=1}^n x_i^\alpha$ است.

اثبات: اگر $T = \sum_{i=1}^{n-1} X_i^\alpha$ باشد. آنگاه تابع چگالی احتمال T برابر است با:

$$g^*(t) = \frac{\beta^{(n-1)\alpha} t^{n-2}}{\Gamma(n-1)} e^{-\beta^\alpha t}, \quad t > 0$$

از طرفی چون $U = X_n^\alpha$ و T مستقل هستند، تابع چگالی احتمال توأم U و T برابر است با:

$$g(u, t) = \frac{\beta^{n\alpha} t^{n-2}}{\Gamma(n-1)} e^{-\beta^\alpha(t+u)}, \quad t > 0, u > 0$$

با در نظر گرفتن تبدیلات $S = T + U$ ، $X_n = U^{\frac{1}{\alpha}}$ ، $S = T + U$ توزیع توأم S و X_n برابر است با:

$$h(x_n, s) = \frac{\alpha \beta^{n\alpha} x_n^{\alpha-1}}{\Gamma(n-1)} (s - x_n^\alpha)^{n-2} e^{-\beta^\alpha s}, \quad s > 0, 0 < x_n < s^{\frac{1}{\alpha}}$$

با توجه به رابطه‌ی (۵) و رابطه‌ی $\hat{f}(x) = h(x_n, s)/g(s)$ داریم:

$$(۸) \quad \hat{f}(x) = \frac{\alpha(n-1)x_n^{\alpha-1}(s-x^\alpha)^{n-2}}{s^{n-1}}, \quad 0 < x < s^{\frac{1}{\alpha}}$$

قضیه ۴. تابع توزیع تجمعی متناظر با تابع چگالی داده شده در رابطه‌ی (۸)، براوردگر ناریب با کمترین واریانس به طور یکنواخت $F(x) = 1 - e^{-(\beta x)^\alpha}$ است.

اثبات: با توجه به $\hat{f}(x)$ ، تابع توزیع تجمعی متناظر با آن برابر است با:

$$\hat{F}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - \left(\frac{s - x^\alpha}{s}\right)^{n-1}, & 0 \leq x < s^{\frac{1}{\alpha}} \\ 1, & x \geq s^{\frac{1}{\alpha}} \end{cases}$$

چون $\hat{F}(x)$ تابعی از آماره‌ی بسنده و کامل S است کافی است نشان دهیم که $\hat{F}(x)$ برآورد نااریب $F(x)$ است که اثبات به پایان می‌رسد.

$$\begin{aligned} E(\hat{F}(x)) &= \int_0^\infty \hat{F}(x)g(s)ds \\ &= \int_0^{x^\alpha} g(s)ds + \int_{x^\alpha}^\infty \left[1 - \left(\frac{s - x^\alpha}{s}\right)^{n-1}\right] g(s)ds \\ &= \int_0^\infty g(s)ds - \frac{\beta^{n\alpha}}{\Gamma(n)} \int_{x^\alpha}^\infty (s - x^\alpha)^{n-1} e^{-(\beta^\alpha s)} ds \\ &= 1 - \frac{\beta^{n\alpha} e^{-(\beta x)^\alpha}}{\Gamma(n)} \int_0^\infty u^{n-1} e^{-\beta^\alpha u} du = 1 - e^{-(\beta x)^\alpha} \\ &= F(x) \end{aligned}$$

قضیه‌ی ۵. میانگین مربع خطای برآوردهای $\hat{f}(x)$ و $\hat{F}(x)$ به‌ترتیب برابر است با:
(الف)

$$\begin{aligned} MSE(\hat{f}(x)) &= \frac{(\alpha(n-1))^2}{x^2 \Gamma(n)} \sum_{j=0}^{n-3} \binom{n-2}{j} (-1)^j (\beta x)^{\alpha(j+2)} \\ &\quad \times \Gamma(n-j-2) - (\alpha \beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-(\beta x)^\alpha})^2 \end{aligned}$$

(ب)

$$MSE(\hat{F}(x)) = \frac{1}{x^\gamma \Gamma(n)} \sum_{j=0}^{n-1} \binom{\gamma n - \gamma}{j} (-1)^j (\beta x)^{\alpha j} \Gamma(n-j) - e^{-\gamma(\beta x)^\alpha}$$

اثبات:

الف) $(\hat{f}(x))^\gamma$ را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$(\hat{f}(x))^\gamma = \alpha^\gamma (n-1)^\gamma x^{\gamma(\alpha-1)} \frac{1}{s^\gamma} \left(1 - \frac{x^\alpha}{s}\right)^{\gamma n - \gamma}$$

با توجه به بسط دوجمله‌ای خیام-نیوتن و تعریف تابع گاما داریم:

$$\begin{aligned} E[(\hat{f}(x))^\gamma] &= \frac{\alpha^\gamma (n-1)^\gamma}{x^\gamma} \sum_{j=0}^{\gamma n - \gamma} \binom{\gamma n - \gamma}{j} (-1)^j x^{\alpha(j+\gamma)} E\left(\frac{1}{s^{j+\gamma}}\right) \\ &= \frac{\alpha^\gamma (n-1)^\gamma}{x^\gamma \Gamma(n)} \sum_{j=0}^{\gamma n - \gamma} \binom{\gamma n - \gamma}{j} (-1)^j (\beta x)^{\alpha(j+\gamma)} \Gamma(n - \gamma - j) \end{aligned}$$

به کمک رابطه‌ی $MSE(\hat{f}(x)) = E[(\hat{f}(x))^\gamma] - (f(x))^\gamma$ اثبات این قسمت به

پایان می‌رسد.

اثبات قسمت (ب) مشابه اثبات قسمت (الف) است. بنا بر این داریم.

$$E[(\hat{F}(x))^\gamma] = 1 + \frac{1}{\Gamma(n)} \sum_{j=0}^{n-1} \binom{\gamma n - \gamma}{j} (-1)^j (\beta x)^{\alpha j} \Gamma(n-j) - \gamma e^{-(\beta x)^\alpha}$$

با توجه به رابطه‌ی $MSE(\hat{F}(x)) = E[(\hat{F}(x))^\gamma] - (F(x))^\gamma$ قسمت (ب) ثابت

می‌شود.

تذکر ۱: برآورد نااریب با کمترین واریانس β برابر $\hat{\beta} = \Gamma(n) / \left[\Gamma(n - \frac{1}{\alpha}) S_{\alpha}^{-1} \right]$ و میانگین مربع خطای آن به صورت زیر است.

$$MSE(\hat{\beta}) = \left\{ \frac{\Gamma(n)\Gamma(n - \frac{2}{\alpha})}{\left[\Gamma\left(n - \frac{1}{\alpha}\right) \right]^2} - 1 \right\} \beta^2.$$

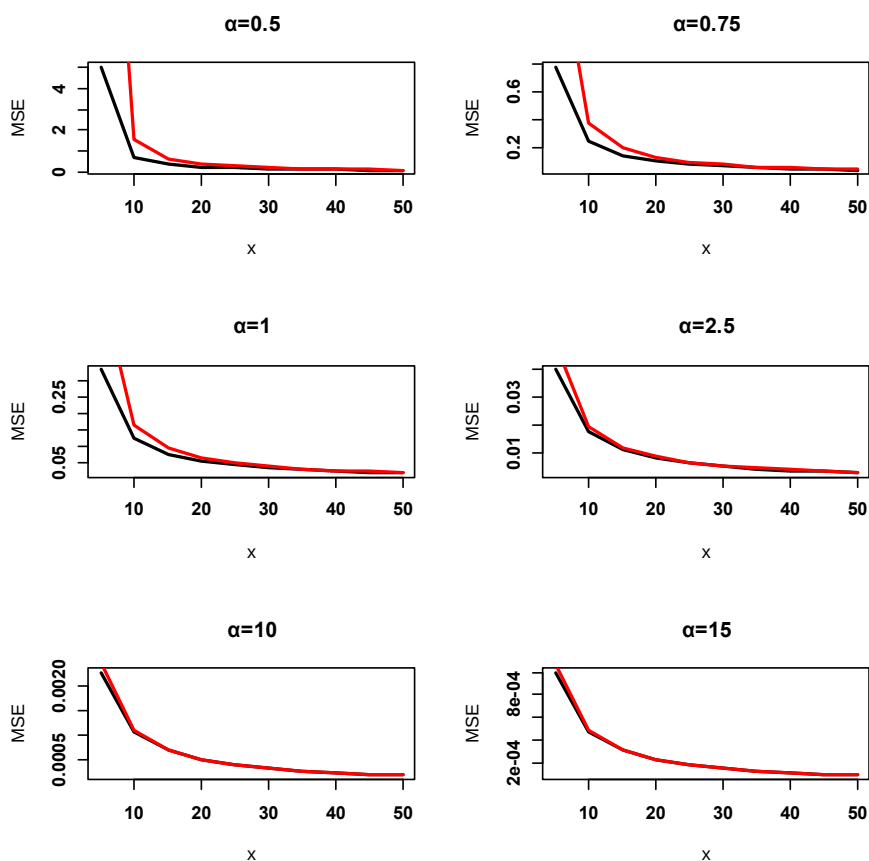
تذکر ۲: با مقایسه‌ی میانگین مربع خطای برآوردهای ماکسیمم درستنمایی و نااریب با کمترین واریانس به طور یکنواخت β ، نتیجه می‌گیریم که برآورد نااریب با کمترین واریانس به طور یکنواخت بهتر از برآورد ماکسیمم درستنمایی آن است و با بزرگ شدن مقدار α کارایی این دو برآوردها به هم نزدیک می‌شود که شکل ۱ نیز این مطلب را تأیید می‌کند. همچنین در حالت $\alpha = 1$ توزیع وایبول به توزیع نمایی تبدیل شده و با قرار دادن $\alpha = 1$ در نتایج مربوط به β در بخش‌های دوم و سوم، می‌توان نتایج پارامتر مقیاس توزیع نمایی را در روش‌های ماکسیمم درستنمایی و نااریب با کمترین واریانس به طور یکنواخت به دست آورد.

۴- مقایسه‌ی برآوردها

در این بخش از روش شبیه‌سازی مونت‌کارلو و یک مجموعه داده‌های واقعی برای مقایسه‌ی برآوردهای ماکسیمم درستنمایی با برآوردهای نااریب با کمترین واریانس استفاده می‌کنیم.

۴-۱- شبیه‌سازی مونت‌کارلو

در مرحله اول، ابتدا نمونه‌های تصادفی به اندازه‌های $n = 10, 15, \dots, 50$ از توزیع یکنواخت در فاصله‌ی $(0, 1)$ تولید می‌کنیم. در مرحله دوم، به کمک نمونه‌های تصادفی تولیدشده در مرحله اول، با استفاده از رابطه‌ی زیر نمونه‌های تصادفی به اندازه‌های $n = 10, 15, \dots, 50$ از توزیع وایبول با $\alpha = 0.5, 1.25, 2, 3$ و $\beta = 0.5, 1.5, 2.5$



شکل ۱- نمودارهای میانگین مربع خطای برآوردهای β در حالت‌های ماکسیمم درستنمایی (خط به رنگ قرمز) و ناریب با کم‌ترین واریانس به‌طور یکنواخت (خط به رنگ مشکی) به‌ازای مقادیر متفاوت α .

تولید می‌کنیم.

$$X = \frac{1}{\beta} \left[-\log(1 - U) \right]^{\frac{1}{\alpha}}$$

در مرحله سوم، با استفاده از نمونه‌های تولیدشده در مرحله دوم، برآوردهای ماکسیمم درستنمایی و ناریب با کم‌ترین واریانس به‌طور یکنواخت β را به دست می‌آوریم. در مرحله چهارم، میانگین مربع خطای برآوردهای محاسبه‌شده برای β را در مرحله

سوم به دست می‌آوریم. در مرحله‌ی پنجم، تمام مراحل اول تا چهارم را ۵۰۰۰ بار تکرار نموده و سپس میانگین، این ۵۰۰۰ میانگین مربع خطا را به دست می‌آوریم. نتایج شبیه‌سازی برای برآورد تابع چگالی احتمال و تابع توزیع تجمعی تحت روش‌های اشاره شده در بخش‌های دوم و سوم در جدول‌های ۱ و ۲ آمده است. نتایج این جدول‌ها نشان می‌دهد که برآورد نااریب با کم‌ترین واریانس به‌طور یکنواخت تابع‌های چگالی احتمال و توزیع تجمعی توزیع وایبول از برآورد ماکسیمم درستنمایی‌شان بهتر است. همچنین از جدول ۲ نتیجه می‌گیریم با افزایش اندازه‌ی نمونه، میانگین میانگین مربع خطای برآورد نااریب با کم‌ترین واریانس تابع توزیع تجمعی کاهش می‌یابد.

جدول ۱- مقایسه‌ی برآوردهای ماکسیمم درستنمایی و نااریب با کم‌ترین واریانس به‌طور یکنواخت تابع چگالی احتمال توزیع وایبول

n	(α, β)	میانگین، میانگین مربع خطای $\hat{f}$	میانگین، میانگین مربع خطای $\hat{F}$
۱۰	(۲, ۱.۵)	۰.۸۵۱۳۹	۰.۴۰۳۸
۱۵		۰.۹۷۸۶۵	۰.۲۵۴۹
۲۰		۰.۸۸۸۷۵	۰.۱۸۳۱
۲۵		۰.۹۹۲۸۳	۰.۱۴۱۱
۳۰		۰.۹۹۴۲۰	۰.۱۱۶۴
۳۵		۰.۹۹۵۱۸	۰.۱۰۴۵
۴۰		۰.۹۹۶۸۷	۰.۰۹۰۱
۴۵		۰.۹۹۸۷۲	۰.۰۷۶۹
۵۰	(۳, ۰.۵)	۰.۹۹۹۲۰	۰.۰۶۹۰
۱۰		۰.۱۹۵۷۰	۰.۰۸۰۴
۱۵		۰.۲۰۰۶۴	۰.۰۴۹۲
۲۰		۰.۲۰۳۶۳	۰.۰۳۵۹
۲۵		۰.۲۰۴۶۱	۰.۰۲۶۷
۳۰		۰.۲۰۴۸۱	۰.۰۲۲۶
۳۵		۰.۲۰۵۰۸	۰.۰۱۸۹
۴۰		۰.۲۰۵۲۹	۰.۰۱۵۹
۴۵		۰.۲۰۵۶۴	۰.۰۱۴۹
۵۰		۰.۲۰۵۶۵	۰.۰۱۳۲

ادامه‌ی جدول ۱- مقایسه‌ی برآوردهای ماکسیمم درست‌نمایی و ناریب با کم‌ترین واریانس به‌طور یکنواخت تابع چگالی احتمال توزیع بایبول

n	(α, β)	میانگین، میانگین مربع خطای $\hat{f}$	میانگین، میانگین مربع خطای $\hat{f}$
۱۰	(۱/۲۵, ۲/۵)	۱/۷۸۱۲۵	۰/۰۰۴۳۳
۱۵		۱/۸۲۸۶۷	۰/۰۰۲۵۸
۲۰		۱/۸۳۶۳۶	۰/۰۰۱۹۳
۲۵		۱/۸۴۶۴۵	۰/۰۰۱۵۵
۳۰		۱/۸۵۲۸۵	۰/۰۰۱۲۱
۳۵		۱/۸۵۳۸۴	۰/۰۰۱۰۰
۴۰		۱/۸۵۵۲۴	۰/۰۰۰۹۰
۴۵		۱/۸۵۶۰۴	۰/۰۰۰۷۶
۵۰		۱/۸۶۱۰۴	۰/۰۰۰۷۰
۱۰	(۰/۵, ۰/۵)	$۱/۵۹ \times ۱۰^{-۴}$	$۱/۷۷ \times ۱۰^{-۳}$
۱۵		$۲/۸۴ \times ۱۰^{-۳}$	$۲/۰۱ \times ۱۰^{-۲}$
۲۰		$۸/۲۴ \times ۱۰^{-۳}$	$۳/۴۲ \times ۱۰^{-۲}$
۲۵		$۱/۲۱ \times ۱۰^{-۵}$	$۸/۰۵ \times ۱۰^{-۳}$
۳۰		$۲/۴۲ \times ۱۰^{-۴}$	$۸/۰۹ \times ۱۰^{-۲}$
۳۵		$۱/۶۰ \times ۱۰^{-۴}$	$۶/۰۹ \times ۱۰^{-۲}$
۴۰		$۶/۱۲ \times ۱۰^{-۸}$	$۴/۴۷ \times ۱۰^{-۶}$
۴۵		$۲/۴۱ \times ۱۰^{-۴}$	$۵/۱۶ \times ۱۰^{-۲}$
۵۰		$۸/۳۶ \times ۱۰^{-۵}$	$۱/۹۸ \times ۱۰^{-۳}$

جدول ۲- مقایسه‌ی برآوردهای ماکسیمم درستنمایی و نااریب با کمترین واریانس تابع توزیع تجمعی توزیع وایبول

n	(α, β)	میانگین، میانگین مربع خطای $\hat{F}$	میانگین، میانگین مربع خطای $\hat{F}$
۱۰	(۲, ۱/۵)	۰/۳۲۰۷۵	۰/۰۰۸۱۹
۱۵		۰/۳۲۸۳۲	۰/۰۰۵۲۱
۲۰		۰/۳۲۹۹۳	۰/۰۰۳۸۲
۲۵		۰/۳۳۰۶۷	۰/۰۰۳۰۸
۳۰		۰/۳۳۰۹۰	۰/۰۰۲۴۰
۳۵		۰/۳۳۱۹۰	۰/۰۰۲۱۷
۴۰		۰/۳۳۳۰۶	۰/۰۰۱۸۳
۴۵		۰/۳۳۳۲۴	۰/۰۰۱۷۰
۵۰		۰/۳۳۳۷۳	۰/۰۰۱۴۵
۱۰	(۳, ۰/۵)	۰/۳۲۱۱۴	۰/۰۰۷۶۹
۱۵		۰/۳۲۸۹۸	۰/۰۰۵۰۷
۲۰		۰/۳۳۰۲۶	۰/۰۰۳۵۷
۲۵		۰/۳۳۱۱۳	۰/۰۰۳۰۲
۳۰		۰/۳۳۱۲۳	۰/۰۰۲۶۱
۳۵		۰/۳۳۱۳۹	۰/۰۰۲۰۹
۴۰		۰/۳۳۳۲۵	۰/۰۰۱۸۲
۴۵		۰/۳۳۴۲۲	۰/۰۰۱۶۸
۵۰		۰/۳۳۴۲۹	۰/۰۰۱۵۴
۱۰	(۱/۲۵, ۲/۵)	۰/۳۱۸۰۲	۰/۰۰۷۸۷
۱۵		۰/۳۲۶۷۵	۰/۰۰۵۲۶
۲۰		۰/۳۲۷۱۲	۰/۰۰۳۷۹
۲۵		۰/۳۳۰۳۷	۰/۰۰۳۰۳
۳۰		۰/۳۳۳۵۲	۰/۰۰۲۵۱
۳۵		۰/۳۳۴۱۳	۰/۰۰۲۱۳
۴۰		۰/۳۳۵۰۴	۰/۰۰۱۸۳
۴۵		۰/۳۳۵۶۵	۰/۰۰۱۶۸
۵۰		۰/۳۳۶۰۲	۰/۰۰۱۶۵

ادامه‌ی جدول ۲- مقایسه‌ی برآوردهای ماکسیمم درستنمایی و نارایب با کمترین واریانس تابع توزیع تجمعی توزیع وایبول

n	(α, β)	میانگین، میانگین مربع خطای $\hat{F}$	میانگین، میانگین مربع خطای $\hat{F}$
۱۰	(۰/۵, ۰/۵)	۰/۰۳۲۱۱	۰/۰۰۷۸۲
۱۵		۰/۰۳۲۸۲	۰/۰۰۵۱۰
۲۰		۰/۰۳۲۹۵	۰/۰۰۳۸۶
۲۵		۰/۰۳۲۱۰	۰/۰۰۳۱۳
۳۰		۰/۰۳۳۱۴	۰/۰۰۲۴۹
۳۵		۰/۰۳۳۲۰	۰/۰۰۲۱۷
۴۰		۰/۰۳۳۱۸	۰/۰۰۱۸۵
۴۵		۰/۰۳۳۲۳	۰/۰۰۱۶۷
۵۰		۰/۰۳۳۲۹	۰/۰۰۱۴۸

۲-۴- تحلیل با داده‌های واقعی

در این بخش با استفاده از یک مجموعه داده‌های واقعی به مقایسه‌ی برآوردهای ماکسیمم درستنمایی و نارایب با کمترین واریانس به‌طور یکنواخت تابع‌های چگالی احتمال و توزیع تجمعی توزیع وایبول می‌پردازیم. این مجموعه داده‌ها که در یعقوبزاده و دیگران [۱] گزارش شده، مربوط به مقاومت الیاف شیشه‌های به ضخامت ۱/۵ سانتی‌متری است. چون در این مقاله α را معلوم در نظر گرفته‌ایم ابتدا به روش زیر برآوردی برای α به‌دست آورده و به‌عنوان مقدار معلوم‌شده‌ی α در نظر می‌گیریم. می‌دانیم که تابع چگالی احتمال $U = (\beta X)^\alpha$ ، $u > 0$ ، $h(u) = e^{-u}$ است. از طرفی داریم:

$$\alpha(\log\beta + \log X) = \log U$$

$$Var[\alpha(\log\beta + \log X)] = Var(\log U)$$

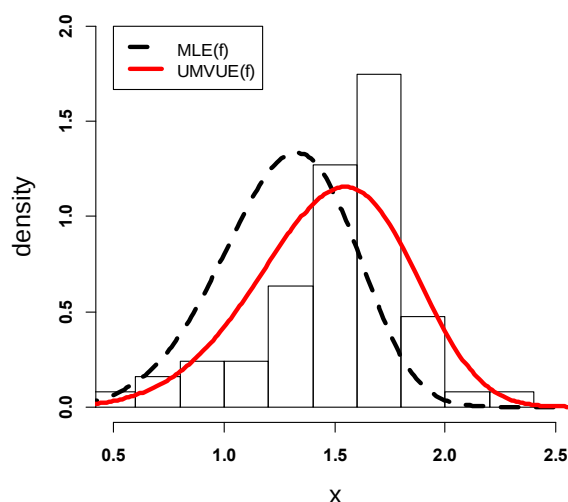
با توجه به $Var(\log U) = \frac{\pi^2}{6}$ ، (منون [۱۱]) رابطه‌ی زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$\alpha = \left\{ \frac{6}{\pi^2} \left[\sum_{i=1}^n (\log X_i)^2 - \left(\sum_{i=1}^n \log X_i \right)^2 / n \right] / (n-1) \right\}^{-\frac{1}{2}}$$

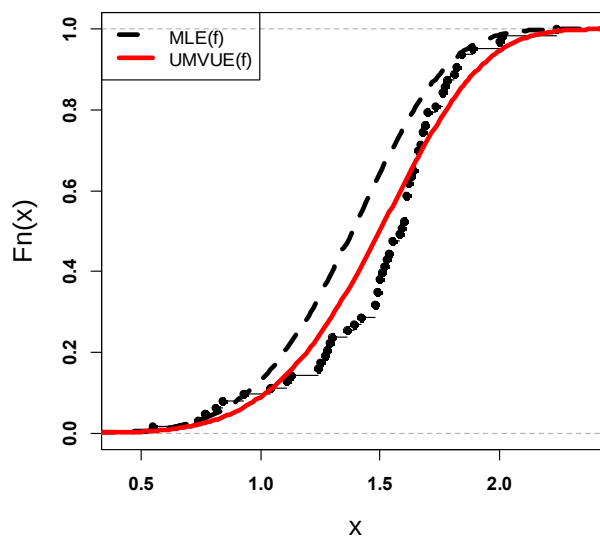
که به کمک این مجموعه داده‌ها $\alpha = 4/932369$ به دست می‌آید. با توجه به این مقدار α و بر اساس نتایج بخش‌های دوم و سوم، مقادیر لگاریتم تابع درستنمایی، معیار اطلاع آکائیک، معیار اطلاع بیزی و آماره‌ی آزمون کولموگوروف-اسمیرنوف با p -مقدار مربوطه‌اش در جدول ۳ ارایه و نمودارهای برآورد تابع‌های چگالی احتمال و توزیع تجمعی توزیع وایبول به ترتیب در شکل‌های ۲ و ۳ نشان داده شده است که همه دلالت بر بهتر بودن روش برآورد نااریب با کم‌ترین واریانس به طور یکنواخت دارند.

جدول ۳- مقادیر لگاریتم تابع درستنمایی، اطلاع آکائیک، اطلاع بیزی تابع‌های چگالی احتمال و توزیع تجمعی توزیع وایبول

معیار اطلاع بیزی	لگاریتم تابع درستنمایی	روش برآورد	p -مقدار	آماره‌ی آزمون کولموگوروف-اسمیرنوف	معیار اطلاع بیزی
۳۴/۷۴	-۱۶/۳۷	ماکسیمم درستنمایی	۰/۰۱۶	۰/۱۹۵۸	۴۱/۰۳
۳۴/۴۲	-۱۶/۲۱	نااریب با کم‌ترین واریانس	۰/۰۱۹	۰/۱۹۲۱	۴۰/۷۱



شکل ۲- نمودار برآورد تابع چگالی احتمال توزیع وایبول به روش‌های ماکسیمم درستنمایی و نااریب با کم‌ترین واریانس



شکل ۳- نمودار براورد تابع توزیع تجمعی وایبول به روش‌های ماکسیمم درستنمایی و ناریب با کم‌ترین واریانس

۵- بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله برآوردهای ماکسیمم درستنمایی تابع‌های چگالی احتمال و توزیع تجمعی توزیع وایبول را به دست آورده و با استفاده از شبیه‌سازی مونت کارلو و یک مجموعه داده‌های واقعی نشان دادیم که براورد ناریب با کم‌ترین واریانس به طور یکنواخت بهتر از براورد ماکسیمم درستنمایی است. همچنین نتیجه گرفتیم که براورد ناریب با کم‌ترین واریانس به طور یکنواخت β از براورد ماکسیمم درستنمایی‌اش بهتر بوده و با بزرگ شدن α کارایی این دو براورد گر یکسان می‌شود.

توضیحات

۱. براورد ماکسیمم درستنمایی (Maximum Likelihood Estimator (MLE))
۲. براورد ناریب با کم‌ترین واریانس به طور یکنواخت (Uniformly Minimum Variance Unbiased Estimator (UMVUE))

۳. میانگین مربع خطا (Mean Square Error (MSE))

مرجع‌ها

- [۱] یعقوبزاده شهرستانی، شهرام؛ شادرخ، علی؛ یارمحمدی، مسعود (۱۳۹۴). چندجمله‌ای‌های استرلینگ و یک تعمیم جدید از توزیع وایبول هندسی. مجله‌ی علوم آماری، دوره‌ی ۹، شماره‌ی ۱، صص ۱۱۹-۱۴۱.
- [2] Alizadeh, M., Bagheri, S.F. and Khaleghy Moghaddam, M. (2013). Efficient Estimation of the Density and Cumulative Distribution Function of the Generalized Rayleigh Distribution. *Journal of Statistical Research of Iran*, **10**, 1-22.
- [3] Berrettoni, J.N. (1964). Practical Applications of the Weibull Distribution. *Industrial Quality Control*, **21**, 71-79.
- [4] Bagheri, S.F., Alizadeh, M., Baloui Jamkhaneh, E. and Nadarajah, S. (2013a). Evaluation and Comparison of Estimations in the Generalized Exponential-Poisson Distribution. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, <http://dx.doi.org/10.1080/00949655.2013.793342>.
- [5] Bagheri, S.F., Alizadeh, M. and Nadarajah, S. (2013b). Efficient Estimation of the PDF and the CDF of the Exponentiated Gumbel Distribution. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, to appear.
- [6] Dixit, U.J. and Jabbari Nooghabi, M. (2010). Efficient Estimation in the Pareto Distribution, *Statistical Methodology*, **7**, 687-691.
- [7] Jabbari Nooghabi, M. and Jabbari Nooghabi, H. (2010). Efficient Estimation Estimation of pdf, CDF and rth Moment for the Exponentiated Pareto Distribution in the Presence of Outliers, *Statistics*, **44**, 1-20.
- [8] Kao, J.H.K. (1958). Computer Methods for Estimating Weibull Parameters in Reliability Studies. *Transactions of IRE-Reliability and Quality Control*, **13**, 15-22.

- [9] Kao, J.H.K. (1959). A Graphical Estimation of Mixed Weibull Parameters in Lifetesting Electron Tubes. *Technometrics*, **1**, 389-407.
- [10] Lieblein, J. and ZELEN, M. (1956). Statistical Investigation of the Fatigue Life of Deep Groove Ball Bearings. *Journal of research of the National Bureau of Standards*, **57**, 273-315.
- [11] Mann, N.R. (1968). *Results on Statistical Estimation and Hypothesis Testing with Application to the Weibull and Extreme Value Distribution*. Aerospace Research Laboratories, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio.
- [12] Menon, M.V. (1963). Estimation of the Shape and Scale Parameters of the Weibull Distribution. *Technometric*, **5**, 175-182.
- [13] Weibull, W (1939). The Phenomenon of Rupture in Solids. *Ingenior Vetenskaps Akademiens Handlingar* 153, 2.
- [14] Weibull, W. (1951). A Statistical Distribution Function of Wide Applicability. *Journal of Applied Mechanics*, **18**, 293-297.

شهرام یعقوبزاده شهرستانی

دکتری آمار

تهران، گروه آمار دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۴۶۹۷-۱۹۳۹۵

رایانشانی: yagoubzade@gmail.com