مجله‌ی بررسی‌های آمار رسمی ایران
سال ۲۱، شماره‌ی ۱، بهار و تابستان ۱۳۸۹، صص ۷۵- ۸۷

ویژگی‌ها و مشخصه‌هایی از آنتروپی رنی ماکسیمم

منیژه صانعی طبس، غلامرضا محتشمی برزادران* و محمد امینی

دانشگاه فردوسی مشهد

چکیده: در این مقاله آنتروپی رنی و ویژگی‌هایی از آن بیان شده است. یافتن تابع چگالی که آنتروپی شانون را ماکسیمم می‌نماید وقتی علاوه بر محدودیت تابع چگالی بودن، محدودیت‌های دیگری نیز داشته باشیم در سال ۱۹۷۳ توسط کاگان و همکارانش مطرح شد. در این مقاله آنتروپی رنی ماکسیمم، با توجه به محدودیت‌های مشخص علاوه بر تابع چگالی احتمال بودن به تفصیل مورد بحث قرار گرفته و مشخصه‌هایی از آن مفهوم ارایه گردیده است.

واژگان کلیدی: آنتروپی شانون؛آنتروپی رنی؛ آنتروپی تی‌سالیس؛ آنتروپی ماکسیمم؛ آنتروپی رنی ماکسیمم؛ اندازه‌های اطلاع.

۱- مقدمه

نظریه‌ی اطلاع با مقاله‌ی شانون در سال ۱۹۴۸ رویداد جدیدی را در نظریه‌ی ارتباطات ایجاد کرد. او در خلال جنگ جهانی دوم در شرکت بل سیستم مسئولیت تجزیه و تحلیل مخابراتی، کد نمودن و کدگشایی کردن مسائل و نقشه‌های طراحی‌شده توسط روزولت و چرچیل در ارتباط با هدایت جنگ را انجام می‌داد. بعد از اتمام جنگ تجربیات او به مقاله‌ی مشهور شانون [۱۶] منجر شد. بعد از آن کتاب‌ها و مقاله‌های بسیاری در این زمینه و توسیع آن به چاپ رسیده است، که از جمله می‌توان به مقاله‌ی وردو [۱۸] و کتاب کاور و توماس [۸] اشاره کرد که منابع زیادی را در این راستا در بر دارد. آنتروپی رنی و تی‌سالیس نیز از جمله توسیع‌های آنتروپی شانون هستند که آنتروپی رنی با کار رنی [۱۵] شروع و هم اکنون نیز ادامه دارد. آنتروپی تی‌سالیس نیز توسط هاوردا وچاروات

دریافت: ۱۳۸۸/۸/۲۷، پذیرش: ۱۳۸۹/۲/۱۸

* نویسنده‌ی عهده‌دار مکاتبات

[۱۰] در سال ۱۹۶۷ وسپس در سال ۱۹۸۸توسط تی‌سالیس [۱۷] معرفی شد. باتوجه به رابطه‌ی یکنوایی که بین این دو آنتروپی وجود دارد، نتایج به دست آمده برای آنتروپی رنی، برای آنتروپی تی‌سالیس نیز برقرار می‌باشند.

در بسیاری از مواقع به دنبال یافتن توزیعی که آنتروپی را ماکسیمم می‌کند، هستیم. چگونگی یافتن آن با توجه به محدودیت‌هایی که علاوه بر تابع (احتمال) چگالی بودن لازم است، توسط کاگان و دیگران [۱۲] و کاپور [۱۳] بیان گردید. توزیع دارای آنتروپی ماکسیمم معمولاً به‌صورت تابع نمایی از محدودیت‌ها بیان می‌شود؛ یکی از این حالت‌ها زمانی است که گشتاورهای مراتب مختلف مشخص باشد، که به ازای دامنه‌ی تغییرات متغیر تصادفی توزیع‌های مشهوری را به‌عنوان توزیع آنتروپی ماکسیمم نتیجه می‌دهد. آنتروپی رنی ماکسیمم و آنتروپی تی‌سالیس ماکسیمم نیز توسیع ایده‌ی آنتروپی ماکسیمم به کلاس بزرگ‌تری از آنتروپی شانون است، که کستا و دیگران ([۶] و [۷])، باشکیرو ([۱] و [۲])، ویگنات و جانسون [۱۹]، هارموس [۹]، براودی ودیگران [۵]، ویلک و ولودارزیک [۲۰]، برچر ([۳] و [۴])، جوسه و نایک [۱۱] و ناگی و رمرا [۱۴] تعبیرها و مشخصه‌سازی‌هایی بر اساس آنتروپی رنی ماکسیمم و یا آنتروپی تی‌سالیس ماکسیمم در حالت‌های یک‌متغیره و چندمتغیره ارایه داده‌اند.

در این مقاله ویژگی‌ها و مشخصه‌هایی بر اساس آنتروپی رنی ماکسیمم و آنتروپی تی‌سالیس ماکسیمم تحت محدودیت‌های خاص در راستای برچر ([۳] و [۴]) و براودی و دیگران [۵] بیان خواهد شد.

۲- آنتروپی رنی و تی‌سالیس

برای متغیر تصادفی X، با تابع چگالی احتمال $P=(p_1,\dots,p_n)$ اطلاع شانون به‌صورت $H(X)=-\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i$ تعریف می‌شود که در آن $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ است. با توجه به این تعریف، که شانون در سال ۱۹۴۸ بیان کرد برای حالت‌های پیوسته نیز $H(X)=-\int_D f(x)\log f(x)dx$ تعریف می‌شود.

از جمله توسیع این تعاریف به اندازه‌های دیگر اطلاع توسط رنی با آنتروپی رنی مرتبه‌ی α به‌صورت $H_\alpha^1 f(x)=\frac{1}{1-\alpha}\log\int_0^\infty f^\alpha(x)dx$ برای $\alpha\neq 1$، $\alpha>0$

تعریف می‌شود که $\lim_{\alpha \to 1} H_{\alpha}^{1}\{f(x)\} = H(X)$ همان آنتروپی شانون است. $H_{\alpha}^{1} f(x)$ یک تابع پیوسته مثبت کاهشی از α است که برای $0 < \alpha < \beta$ داریم: $H_{\alpha}^{1} \geq H_{\beta}^{1}$ و تساوی وقتی برقرار است که توزیع متغیر تصادفی X یکنواخت باشد.

در این راستا تعمیم اطلاع کولبک نیز به‌صورت $D_{\alpha}(f \,\|\, g) = \frac{1}{\alpha - 1} \log \left\{ \int_{0}^{\infty} \frac{f^{\alpha}(x)}{g^{\alpha-1}(x)} dx \right\}$ تحت عنوان اندازه‌ی اطلاع α-رنی می‌باشد که $\lim_{\alpha \to 1} D_{\alpha}(f \,\|\, g)$ همان اطلاع کولبک بین f و g را نتیجه می‌دهد. بعد از معرفی ساختاری برای توسیع آنتروپی شانون توسط هاوردا و دیگران در سال ۱۹۶۷ تی‌سالیس در سال ۱۹۸۸ مفهوم آنتروپی تی‌سالیس را به‌صورت $H_{\alpha}^{2}\{f(x)\} = \frac{1}{\alpha - 1}\left\{1 - \int_{0}^{\infty} f^{\alpha}(x) dx\right\}$ بیان نمود که در این حالت نیز $\lim_{\alpha \to 1} H_{\alpha}^{2}\{f(x)\}$ همان آنتروپی شانون را نتیجه می‌دهد به‌سادگی می‌توان دید که $H_{\alpha}^{1}\{f(x)\} = \frac{1}{1-\alpha} \log[1 + (1-\alpha) H_{\alpha}^{2}\{f(x)\}]$ ارتباط بین این دو آنتروپی را نشان می‌دهد.

در حالت چندمتغیره نیز آنتروپی رنی با توجه به $\int \ldots \int f^{\alpha}(x) dx$ از رابطه‌ی $H_{\alpha}^{1}\{f(x)\}$ به دست می‌آید. از جمله برای توزیع‌های: چندمتغیره‌ی نرمال، پی‌یرسون نوع پنج، پی‌یرسون نوع دو، متقارن از نوع کاتز، لوژستیک، بر، پاراتوی نوع چهار، لیویل، نمایی و چندمتغیره لگ نرمال، با انجام محاسبات نسبتاً ساده‌ای می‌توان آنتروپی رنی و تی‌سالیس را به دست آورد. همچنین هر گاه X یک بردار تصادفی n بعدی و A یک ماتریس $n \times n$ باشد آنتروپی رنی تبدیل تصادفی $Y = AX$ مشابه آنتروپی شانون از رابطه‌ی $H_{\alpha}^{1}\{g(y)\} = \log|\det A| + H_{\alpha}^{1}\{f(x)\}$ به دست می‌آید که در این حالت نیز تبدیل متعامد تغییری در آنتروپی رنی نمی‌دهد.

در بسیاری از مواقع با توجه به دانستن مقادیر گشتاورهای مراتب مختلف یک توزیع علاقه‌مند به یافتن توزیعی که دارای آنتروپی ماکسیمم است هستیم که کاربردهای دیگری نیز دارد. در این ارتباط کاگان وهمکارانش در سال ۱۹۷۳ قضیه‌ی زیر را بیان کرده‌اند [۱۲].

قضیه‌ی ۱ *هرگاه X متغیر تصادفی باشد که $f(x) > ۰ \, , \, \forall x \in D$ و همچنین توابع $h_i(x)$ ، $i = ۱,۲,\ldots,k$ طوری باشند که $E\{h_i(X)\} = \theta_i$ ، $i = ۱,۲,\ldots,k$ و $\int_D f(x)dx = ۱$ و θ_i ها نیز ثابت باشند، آنگاه توزیع دارای آنتروپی ماکسیمم به‌صورت نمایی $f(x) = e^{c_۰ + c_۱ h_۱(x) + \cdots + c_k h_k(x)}$ است که $c_k, \ldots, c_۱, c_۰$ به‌کمک شرایط ذکر شده به دست می‌آیند.*

به‌عنوان مثال برای متغیر تصادفی پیوسته‌ی نامنفی که $E(X) = a$ باشد توزیع نمایی، دارای آنتروپی ماکسیمم است و برای متغیرهای تصادفی پیوسته که $E(X^۲) = b$ ، $E(X) = a$ باشد توزیع نرمال و در حالت گسسته $(X \in Z)$ با شرایط بالا توزیع نرمال گسسته دارای آنتروپی ماکسیمم خواهد بود.

برای حالتی که میانگین حسابی، هندسی و هارمونیک معلوم باشند توزیع گاوسین وارون و هرگاه میانگین هندسی و هارمونیک معلوم باشند توزیع پی‌یرسون نوع پنج دارای ماکسیمم آنتروپی خواهد بود. برای آنتروپی‌های ذکر شده متغیر تصادفی می‌تواند گسسته، پیوسته، نامنفی یا روی اعداد حقیقی تعریف شود که برای همه‌ی حالت‌ها امکان‌پذیر است، در اینجا روی متغیرهای تصادفی نامنفی پیوسته متمرکز می‌شویم ولی برای بقیه‌ی حالت‌ها نیز به‌طور مشابه می‌توان عمل کرد. حال این دیدگاه را برای آنتروپی رنی و تی‌سالیس ارایه می‌دهیم.

۳- آنتروپی رنی ماکسیمم

آنتروپی رنی ماکسیمم $H_\alpha^۱\{f(x)\} = \frac{۱}{۱-\alpha}\log\int_۰^\infty f^\alpha(x)dx$ تحت شرایط $\int_۰^\infty g_i(x)f(x)dx = \theta_i$ ، $i = ۱,۲,\ldots,k$ و $\int_۰^\infty f(x)dx = ۱$ به‌کمک ضرایب نامعین لاگرانژ به‌صورت زیر بدست می‌آید:

$$\frac{\partial}{\partial f}\left[\frac{۱}{۱-\alpha}\log\int_۰^\infty f^\alpha(x)dx - \lambda\left\{\int_۰^\infty f(x)dx - ۱\right\}\right.$$
$$\left. - \sum_{j=۱}^{k}\lambda_j\left\{\int_۰^\infty g_j(x)f(x)dx - \theta_j\right\}\right] = ۰$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\alpha f^{\alpha-1}(x)}{(1-\alpha)\int_0^\infty f^{\alpha}(x)dx}-\lambda-\sum_{j=1}^{k}\lambda_j g_j(x)=0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\alpha\int_0^\infty f^{\alpha}(x)dx}{(1-\alpha)\int_0^\infty f^{\alpha}(x)dx}-\lambda\int_0^\infty f(x)dx-\sum_{j=1}^{k}\lambda_j\int_0^\infty g_j(x)f(x)dx=0$$

در نتیجه:

$$\frac{\alpha}{1-\alpha}-\lambda-\sum_{j=1}^{k}\lambda_j\theta_j=0 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda=\frac{\alpha}{1-\alpha}-\sum_{j=1}^{k}\lambda_j\theta_j \qquad \Rightarrow$$

$$f^{\alpha-1}(x)=\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)\int_0^\infty f^{\alpha}(x)dx\left\{\lambda+\sum_{j=1}^{k}\lambda_j g_j(X)\right\},$$

$$\begin{aligned} f(x)&=\left\{\int_0^\infty f^{\alpha}(x)dx\right\}^{\frac{1}{\alpha-1}}\left\{\frac{1-\alpha}{\alpha}\lambda+\frac{1-\alpha}{\alpha}\sum_{j=1}^{k}\lambda_j g_j(x)\right\}^{\frac{1}{\alpha-1}}\\ &=\left\{\int_0^\infty f^{\alpha}(x)dx\right\}^{\frac{1}{\alpha-1}}\left\{\frac{1-\alpha}{\alpha}\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}-\sum_{j=1}^{k}\lambda_j\theta_j\right)\right.\\ &\qquad\left.+\frac{1-\alpha}{\alpha}\sum_{j=1}^{k}\lambda_j g_j(x)\right\}^{\frac{1}{\alpha-1}}\\ &=\left\{\int_0^\infty f^{\alpha}(x)dx\right\}^{\frac{1}{\alpha-1}}\left[1-\frac{1-\alpha}{\alpha}\sum_{j=1}^{k}\lambda_j\{\theta_j-g_j(x)\}\right]^{\frac{1}{\alpha-1}}. \end{aligned}$$

هرگاه $B(\alpha,\theta_1,\ldots,\theta_k)=\int_0^\infty\left[1-\frac{1-\alpha}{\alpha}\sum_{j=1}^{k}\lambda_j\{\theta_j-g_i(x)\}\right]^{\frac{1}{\alpha-1}}dx$ آنگاه:

$$f(x)=\frac{1}{B(\alpha,\theta_1,\ldots,\theta_k)}\left[1-\frac{1-\alpha}{\alpha}\sum_{j=1}^{k}\lambda_j\{\theta_j-g_j(x)\}\right]^{\frac{1}{\alpha-1}}.$$

آنتروپی رنی $H_{\alpha}^{1} f(x)$ را ماکسیمم می‌کند.

محاسبه‌ی انتگرال $B(\alpha,\theta_1,\ldots,\theta_k)$ به‌سادگی امکان‌پذیر نیست و به‌کمک روش‌های عددی با توجه به امکانات امروزی قابل محاسبه می‌باشد.

۴- آنتروپی تی‌سالیس ماکسیمم

آنتروپی تی‌سالیس ماکسیمم

$$H_{\alpha}^{2}\{f(x)\}=\frac{1}{1-\alpha}\left\{\int_{0}^{\infty} f^{\alpha}(x)dx-1\right\}$$

تحت شرایط $\int_{0}^{\infty} g_i(x)f(x)dx=\theta_i$ ، $i=1,2,\ldots,k$ و $\int_{0}^{\infty} f(x)dx=1$ به‌کمک ضرایب نامعین لاگرانژ به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\partial}{\partial f}\left[\frac{1}{1-\alpha}\int_{0}^{\infty} f^{\alpha}(x)dx-\lambda\left\{\int_{0}^{\infty} f(x)dx-1\right\}\right.$$

$$\left.-\sum_{j=1}^{k}\lambda_j\left\{\int_{0}^{\infty} g_j(x)f(x)dx-\theta_j\right\}\right]=0$$

$$\Rightarrow\quad \frac{\alpha f^{\alpha-1}(x)}{(1-\alpha)}-\lambda-\sum_{j=1}^{k}\lambda_j g_j(x)=0$$

$$\Rightarrow\quad f(x)=\left[\frac{1-\alpha}{\alpha}\left\{\lambda+\sum_{j=1}^{k}\lambda_j g_j(x)\right\}\right]^{\frac{1}{\alpha-1}}$$

که ضریب λ و λ_j برای $j=1,2,\ldots,k$ به‌کمک محدودیت‌های ذکر شده محاسبه می‌شوند.

۵- نکاتی در مورد آنتروپی رنی ماکسیمم

در این بخش حالت‌های خاصی از آنتروپی رنی ماکسیمم که به نتایج بهتری منجر می‌شود را مورد توجه قرار می‌دهیم. در حالتی که بیش از دو محدودیت بیان شود مسئله از پیچیدگی خاصی برخوردار خواهد بود.

- هر گاه $g_i(x) = x^{k_i}$ ، $i = ۱,۲,\ldots,k$ ، تابع چگالی که آنتروپی رنی را ماکسیمم می‌کند همان تابع معرفی‌شده در [۵] می‌باشد و در ضمن حالتی که $k_i = i$ باشد، نیز قابل توجه است که در اصل وجود همان گشتاورهای مرتبه ۱ تا k است و برای $k > ۲$ قطعاً به محاسبه‌ی انتگرال‌های پیچیده نیاز داریم.
- قابل توجه است که $g_۱(x) = x$ و $g_۲(x) = x^۲$ ، از جمله مواردی است که برای بیش از یک محدودیت، توزیع ماکسیمم آنتروپی رنی به‌کمک تابع فوق هندسی به دست می‌آید ، یعنی:

$$f(x) = \frac{۱}{B(\alpha,\theta_۱,\theta_۲)}\left[۱ - \frac{۱-\alpha}{\alpha}\lambda_۱(\theta_۱ - x) - \frac{۱-\alpha}{\alpha}\lambda_۲(\theta_۲ - x^۲)\right]^{\frac{۱}{\alpha-۱}}$$

پس می‌توان تابع چگالی $f(x)$ را به‌صورت زیر در نظر گرفت

$$f(x) \propto \left(ax^۲ + bx + c\right)^{\frac{۱}{\alpha-۱}}$$

و اگر $y = x + \frac{b}{۲a}$ در نظر گرفته شود آنگاه $f(x) \propto \frac{۱}{(y^۲ + c')}$ است.
با استفاده از تساوی

$$\int_۰^\infty \frac{x^{L-۱}}{(a+bx^k)^\mu}dx = \frac{L}{ka^۲}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{L}{k}}\frac{\Gamma\left(\frac{L}{k}\right)\Gamma\left(\mu - \frac{L}{k}\right)}{\Gamma(\mu)}$$

و با قرار دادن $k = ۲$ ، $a = c'$ ، $b = ۱$ ، $L = ۱$ و $\mu = \frac{۱}{۱-\alpha}$ داریم:

$$B(\alpha,\theta_۱,\theta_۲) = \frac{c'^{\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۱-\alpha}}}{۲} - \frac{\Gamma\left(\frac{۱}{۲}\right)\Gamma\left(\frac{۱}{۱-\alpha} - \frac{۱}{۲}\right)}{\Gamma\left(\frac{۱}{\alpha-۱}\right)}$$

نتیجه می گیریم که $f(x)$ توزیعی از خانواده‌ی بُر XII می‌باشد.

- در حالتی که یک تابع محدودیت داشته باشیم، داریم:

$$B(\alpha,\theta)=\int_{0}^{\infty}\left[1-\frac{1-\alpha}{\alpha}\lambda_1\{\theta-g(x)\}\right]^{\frac{1}{\alpha-1}}dx,$$

و در نتیجه:

$$f(x)=\frac{1}{B(\alpha,\theta)}\left\{1-\frac{1-\alpha}{\alpha}\lambda_1+\frac{1-\alpha}{\alpha}\lambda_1 g(x)\right\}^{\frac{1}{\alpha-1}}$$

که در آن، حالت‌های زیر قابل بررسی است:

۱) اگر $g(x)=x$ باشد، $f(x)\propto\left\{1+\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)\lambda(x-\theta)\right\}^{\frac{1}{\alpha-1}}$ که به‌صورت توزیع پاراتوی تعمیم‌یافته با پارامتر شکل $1-\frac{1}{\alpha}$ و پارامتر مقیاس λ می‌باشد.

۲) اگر $g(x)=x^2$ باشد، $f(x)\propto\left(1-\frac{1-\alpha}{\alpha}\lambda\theta+\lambda\frac{1-\alpha}{\alpha}x^2\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$ که به‌صورت توزیع t استیودنت دارای آنتروپی رنی ماکسیمم با توجه به شرایط ذکر شده، خواهد بود.

۳) در حالتی که محدودیت نداشته باشیم تابع چگالی که دارای آنتروپی رنی ماکسیمم است، مانند آنتروپی شانون به‌صورت یکنواخت خواهد بود.

- در حالت چندمتغیره یعنی $X=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ توزیع دارای آنتروپی رنی ماکسیمم برای توزیع‌های چندمتغیره که در شرط $E[XX']=K$ صدق می‌کند که در آن K یک ماتریس $n\times n$ و X یک بردار تصادفی است (اگر $\frac{n}{n+2}<\alpha<1$) عبارت است از

$$f(x)\propto\left(1+\underline{x}'W^{-1}\underline{x}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}},$$

که در آن

$$W=\left(\frac{2}{\alpha}-n-2\right)K$$

و اگر $\alpha > ۱$ و یا $\alpha < ۰$ باشد، $f(x) \propto (۱-\underline{x}'\Sigma^{-۱}\underline{x})_{+}^{\frac{۱}{\alpha-۱}}$ توزیع‌های دارای آنتروپی رنی ماکسیمم هستند که در آن نمادهای Σ و $(x)_{+}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(x)_{+} = \max(۰, x) \qquad \text{و} \qquad \Sigma = \left(\frac{۲\alpha}{\alpha-۱} + n\right) K$$

- آنتروپی رنی ماکسیمم وقتی $E\left|X_i\right|^{\gamma} = \theta_i > 0$ ، $i = ۱,\ldots,k$ و $\frac{n}{n+\gamma} < \alpha < ۱$ باشد، به‌صورت

$$f(x) \propto \left(۱ + \sum_{i=۱}^{n} \lambda_i \left|x_i\right|^{\gamma}\right)^{\frac{۱}{\alpha-۱}}.$$

است. هر گاه $\alpha < ۰$ یا $\alpha > ۱$ باشد این توزیع به‌صورت

$$f(x) \propto \left(۱ - \sum_{i=۱}^{n} \lambda_i \left|x_i\right|^{\gamma}\right)_{+}^{\frac{۱}{\alpha-۱}}, \qquad \lambda > ۰$$

می‌باشد. وقتی که $\gamma = ۱$ و خصوصاً حالتی که $n = ۱$ توزیع بالا به‌شکل ساده‌ای از توزیع‌ها منجر می‌شود.

- در راستای [۳] و [۴] حل مسئله‌ی بهینه‌سازی

$$\begin{cases} \max_f -\int_{۰}^{\infty} f(x)\log f(x)dx \\ \text{s.t} \\ D(f \,\|\, g) = \int_{۰}^{\infty} f(x)\log\frac{f(x)}{g(x)}dx = \theta \end{cases}$$

منجر به $f(x) = \mathrm{A}e^{\lambda\log\frac{f(x)}{g(x)}}$ می‌گردد. با توجه به $A = \left[\int_{۰}^{\infty} e^{\lambda\log\frac{f(x)}{g(x)}}\right]^{-۱}$ و محدودیت $D(f \,\|\, g) = \theta$ ، خواهیم داشت:

$$f(x)=\frac{\{g(x)\}^{\frac{\lambda}{\lambda-۱}}}{\int_{۰}^{\infty}\{g(x)\}^{\frac{\lambda}{\lambda-۱}}dx},$$

می‌دانیم که

$$\int_{۰}^{\infty}\{g(x)\}^{\frac{\lambda}{\lambda-۱}}dx=e^{(\lambda-۱)H^{۱}_{\frac{\lambda}{\lambda-۱}}\{g(x)\}}$$

در نتیجه مخرج متناسب با آنتروپی رنی است. حال اگر بخواهیم $H^{۱}_{\frac{\lambda}{\lambda-۱}}\{g(x)\}$ را ماکسیمم کنیم در صورتی که $\int_{۰}^{\infty}xf(x)dx=m$ داریم:

$$g(x)\propto\left\{۱-\beta\frac{۱}{۱-\lambda}(x-m)\right\}^{۱-\lambda},$$

که در نهایت،

$$f(x)\propto\left\{۱+\beta\frac{۱}{\lambda-۱}(x-m)\right\}^{-\lambda}.$$

همان فرم به دست آمده در حالت $g(x)=x$ (توزیع پاراتوی تعمیم‌یافته) می‌باشد.

- نکات ذکر شده را برای آنتروپی تی‌سالیس ماکسیمم نیز می‌توان اعمال کرد که روش کار مشابه می‌باشد.

۶- نتیجه‌گیری

در راستای مباحث آنتروپی ماکسیمم، با توجه به محدودیت‌های داده‌شده، آنتروپی رنی ماکسیمم و یا آنتروپی تی‌سالیس ماکسیمم را می‌توان به دست آورد، که هر دو شبیه به هم هستند، به جز حالت‌های بسیار خاص که باید با روش‌های عددی انتگرال‌های حاصل را محاسبه نمود.

سپاس‌گزاری

نویسندگان این مقاله از حمایت قطب داده‌های ترتیبی و فضایی دانشگاه فردوسی مشهد تشکر می‌نمایند.

مرجع‌ها

[1] Bashkirov, A.G. (2004). Maximum Renyi entropy principle for systems with power-law Hamiltonians. *Physical Review Letters*, **93**, 13.

[2] Bashkirov, A.G. (2006). Renyi entropy as a statistical entropy for complex systems. *Theoretical and Mathematical Physics A*, **149**, 1559-1573.

[3] Bercher, J.F. (2008a). On some entropy functionals from Renyi information divergence. *Information Science*, **178**, 2489-2506.

[4] Bercher, J.F. (2008b). Tsallis distribution as standard a maximum entropy solution with tail constraint. *Physics Letters A*, **372**, 5657-5659.

[5] Brody, D.C.; Buckley, I.R.C. and Constantionou, I. (2007). Option price calibration from Renyi entropy. *Physics Letters A*, **366**, 298-307.

[6] Costa, J.A.; Hero, A.O. and Vignat, C. (2002). A characterization of the multivaraite distributions maximizing Renyi entropy. *IEEE International Symposium on Information Theory*, ISIT, Lausanne, 263-263.

[7] Costa, J.A.; Hero, A.O. and Vignat, C. (2006). A geometric characterization of maximum Renyi entropy distributions. *IEEE International Symposium on Information Theory*, ISIT, Lausanne, 1822-1826.

[8] Cover, T.M. and Thomas, J.A. (2006). *Elements of Information Theory*. Second Edition, Wiley, New York.

[9] Harremoes, P. (2006). Interpretations of Renyi entropies and divergences. *Physica A*, **365**, 57-62.

[10] Harvrda, J. and Charvat, F. (1967). Quantification method of classification processes. Concept of structural a-entropy, Kybernetika 3, 30-35 (Review by I. Csiszar in MR, Vol. 34, No.8875).

[11] Jose, K.K. and Naik, S.R. (2008). A class of asymmetric pathway distributions and an entropy interpretation. *Physica A*, **387**, 6943–6951.

[12] Kagan, A.M.; Linnik, Y.V. and Rao, C.R. (1973). *Characterization Problems in Mathematical Statistics*. Wiley, New York.

[13] Kapur, J.N. (1958). *Maximum Entropy Models in Science and Engineering*. Wiley, New York.

[14] Nagy, A. and Romera, E. (2009). Maximum Renyi entropy principle and the generalized Thomas–Fermi model. *Physics Letters A*, **373**, 844–846.

[15] Renyi, A. (1961). On measures of entropy and information. Proc, Berekeley Symposium, *Statist, Probability*, **1**, 547–561.

[16] Shannon, C.E. (1948). A mathematical theory of communication. *Bell System Technical Journal*, **27**, 379–423.

[17] Tsallis, C. (1988). Possible generalizations of Boltzmann–Gibbs statistics. *Journal of Statistical Physics*, *52*, 479–487.

[18] Verdo, S. (1998). Fifty years of Shannon theory. *IEEE Transactions On Information Theory*, **44**, 2057–2077.

[19] Vignat, C. and Johnson, O (2007). Annales de linstitut Henri Poincare (B) Probabilites et Statistis–tiques, **43**, 339–351.

[20] Wilk, G. and Wlodarczyk, Z. (2008). Examples of a possible interpretation of Tsallis entropy, Physica A, **387**, 4809–4813.

[21] Zografos, K. and Nadarajah, S. (2005). Expressions for Renyi and Shannon entropies for multivariate distributions. *Statistics and Probability Letters*, **71**, 71–84

منیژه صانعی طبس
دانشجوی فوق لیسانس آمار
مشهد، میدان آزادی، دانشگاه فردوسی مشهد، دانشکده‌ی علوم ریاضی، گروه آمار.
رایانشانی: *manije_sanei@yahoo.com*

غلامرضا محتشمی برزادران
دکتری آمار
مشهد، میدان آزادی، دانشگاه فردوسی مشهد، دانشکده‌ی علوم ریاضی، گروه آمار.
رایانشانی: *gmb1334@yahoo.com*

محمد امینی
دکتری آمار
مشهد، میدان آزادی، دانشگاه فردوسی مشهد، دانشکده‌ی علوم ریاضی، گروه آمار.
رایانشانی: *mamini48@ yahoo.com*