

ارائه ویژگی‌ها و کاربردهایی از توزیع لگ لجستیک وایبل نمایی شده

آنی‌تا عبدالهی نانواپیشه* و عاطفه عبدالهی نانواپیشه

دانشگاه رازی

چکیده. در این مقاله، ویژگی‌ها و کاربردهایی از یک توزیع چهار پارامتری به نام توزیع لگ-لجستیک وایبل نمایش داده ارائه شده است که کاربردهای بسیاری در هواشناسی، مسائل طول عمر، مدل‌سازی قیمت محصولات کشاورزی و قابلیت اطمینان دارد. این توزیع دارای تابع نرخ خطر افزایشی، کاهشی، u - شکل و u - شکل وارون است. در این مقاله ابتدا ویژگی‌های آماری و ریاضی این توزیع از جمله گشتاورها، برآورد ماکسیمم درست‌نمایی پارامترها، انحراف از میانگین و میانه، نمودار بونفرونی و لورنز بیان و در نهایت کاربردهایی از آن برای نشان دادن انعطاف‌پذیری توزیع ارائه شده است. نتایج برازش داده‌ها نیز مناسب بودن این مدل را برای مجموعه داده‌های واقعی در نظر گرفته شده، تایید می‌کنند.

واژه‌گان کلیدی: لگ لجستیک وایبل، لگ لجستیک وایبل نمایش داده، گشتاورها، داده‌های طول عمر، برآورد پارامترها.

۱- مقدمه

شناسایی یک توزیع مناسب برای مدل‌بندی مجموعه داده‌ها در تجزیه و تحلیل‌های آماری بسیار با اهمیت است. مشخص کردن یک توزیع مناسب برای یک مجموعه از داده‌های خاص به ما کمک خواهد کرد تا استدلال‌هایی را درباره داده‌ها داشته باشیم. به همین

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات

دریافت: ۱۴۰۱/۶/۷، پذیرش: ۱۴۰۲/۱/۱۵.

علت، استفاده از روش‌هایی برای اصلاح توزیع آماری موجود به منظور ایجاد انعطاف‌پذیری بیشتر در مجموعه داده‌ها در زمینه‌های مختلف صورت گرفته است. همان‌طور که می‌دانیم بیشتر توزیع‌های مهم آماری به خانواده بزرگی از توزیع‌ها به نام خانواده توانی تعلق دارند. این خانواده از توزیع‌ها با به توان رساندن تابع توزیع یک توزیع پایه به دست می‌آیند که البته روش‌های مختلفی برای ارائه چنین خانواده‌هایی از توزیع‌ها در منابع موجود است [۹،۶،۴،۲]. توزیع لگ لجستیک وایبل یک توزیع تعمیم‌یافته است که شامل توزیع‌های لگ لجستیک رایلی^۱ (LLoGR)، لگ لجستیک نمایی^۲ (LLoGE) و لگ لجستیک^۳ (LLoG) در حالت‌های خاص است [۱۲،۵،۳]. این توزیع دارای نرخ خطر افزایشی، کاهشی، u -شکل و $-u$ -شکل وارون با توجه به مقادیر پارامترهایش بوده و کاربردهای بسیاری در زمینه‌های هواشناسی، مدل‌سازی قیمت محصولات کشاورزی، جنگلداری و مسائل قابلیت اطمینان دارد [۷-۸-۱۰-۱۱]. در این مقاله، ویژگی‌ها و کاربردهایی از یک توزیع چهار پارامتری به نام توزیع لگ-لجستیک وایبل نمایی شده^۴ ارائه شده است که به طور گسترده در مسائل طول عمر مورد استفاده قرار می‌گیرد. در ادامه، مقاله به صورت زیر سازمان‌دهی شده است: در بخش ۲ و ۳ ویژگی‌های آماری و خواص ریاضی توزیع لگ لجستیک وایبل نمایی شده مورد بحث قرار گرفته است، در بخش ۴، انحراف از میانگین و میانه، معادلات منحنی‌های بونفرونی و لورنز برای این توزیع ارائه شده است و در بخش ۵ پارامترهای توزیع لگ لجستیک وایبل نمایی شده با استفاده از روش ماکسیمم درست‌نمایی محاسبه و بیان شده‌اند و در نهایت در بخش ۶ و ۷ مطالعات شبیه‌سازی و کاربردهایی از این مدل با استفاده از مجموعه داده‌های واقعی ارائه شده است.

۲- توزیع لگ لجستیک وایبل نمایی شده و ویژگی‌های آن

فرض کنید X یک متغیر تصادفی با توزیع لگ لجستیک وایبل باشد (LLoGW) در این صورت تابع توزیع تجمعی آن (cdf) به صورت زیر است:

$$(1) \quad F(x) = 1 - (1 + x^c)^{-1} e^{-\alpha x^\beta}, \quad c, \alpha, \beta > 0, x \geq 0$$

و تابع چگالی احتمال آن نیز به فرم زیر می‌باشد:

$$(۲) \quad F(x) = \frac{e^{-\alpha x^\beta}}{1+x^c} \left\{ \alpha \beta x^{\beta-1} + \frac{cx^{c-1}}{(1+x^c)} \right\}, \quad c, \alpha, \beta > 0, x \geq 0$$

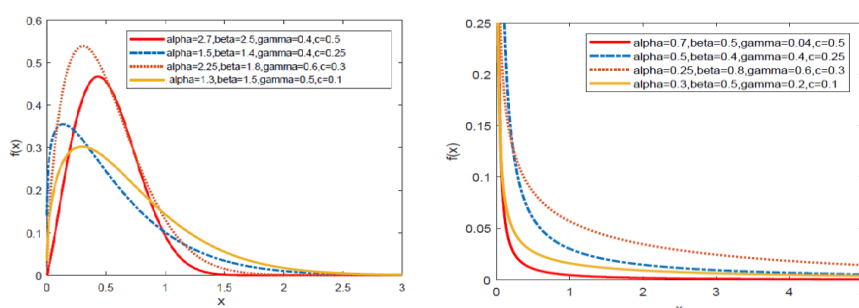
حال فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع توزیع تجمعی رابطه (۱) باشد در این صورت تابع توزیع تجمعی، تابع چگالی احتمال و تابع نرخ خطر توزیع لگ لجستیک وایبل-نمایی-شده (ELLoGW) به صورت زیر خواهد بود [۱۳]:

$$(۳) \quad F(x) = [1 - (1+x^c)^{-1} e^{-\alpha x^\beta}]^\gamma$$

$$(۴) \quad f(x) = \gamma \left[\frac{e^{-\alpha x^\beta}}{1+x^c} \left\{ \alpha \beta x^{\beta-1} + \frac{cx^{c-1}}{(1+x^c)} \right\} \right] [1 - (1+x^c)^{-1} e^{-\alpha x^\beta}]^{\gamma-1}, \quad x \geq 0$$

$$(۵) \quad h(x) = \frac{\gamma \left[\frac{e^{-\alpha x^\beta}}{1+x^c} \left\{ \alpha \beta x^{\beta-1} + \frac{cx^{c-1}}{(1+x^c)} \right\} \right] [1 - (1+x^c)^{-1} e^{-\alpha x^\beta}]^{\gamma-1}}{1 - [1 - (1+x^c)^{-1} e^{-\alpha x^\beta}]^\gamma}$$

در شکل‌های زیر تابع چگالی احتمال و تابع نرخ خطر این توزیع به ازای مقادیر مختلف پارامترها رسم شده است.



شکل ۱- تابع چگالی احتمال توزیع لگ لجستیک وایبل-نمایی-شده به ازای مقادیر مختلف پارامترها

واضح است که تابع چگالی احتمال این توزیع به صورت کاهشی و u - شکل وارون بسته به مقادیر پارامترهایش است. شکل ۲ نمودار تابع نرخ خطر این توزیع را برای مقادیر مختلف پارامترها نشان می‌دهد. همان‌طور که از شکل مشخص است تابع نرخ خطر این توزیع نیز به صورت افزایشی، کاهشی، u - شکل و u - شکل وارون با توجه به مقادیر پارامترهایش است.

۳- گشتاورهای توزیع لگ لجستیک وایبل نمایی شده

در این بخش برای محاسبه گشتاورهای توزیع لگ لجستیک وایبل نمایی شده نیاز به ارائه بسط‌هایی از تابع $f(x)$ داریم که به صورت زیر آن را محاسبه می‌کنیم، اگر $f(x)$ به صورت زیر باشد:

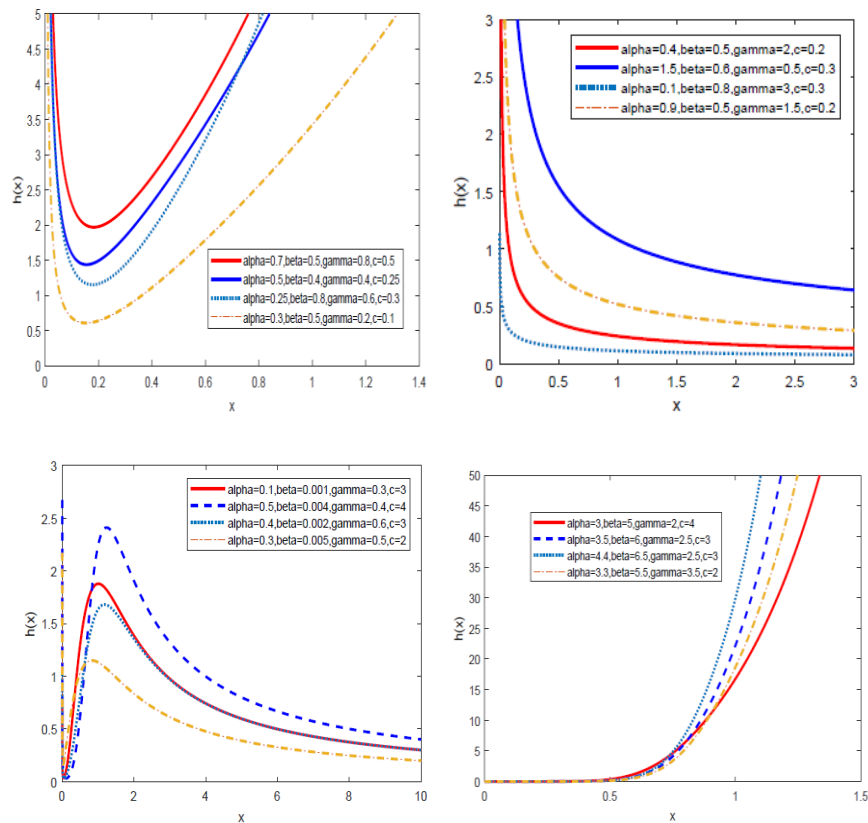
$$f(X) = \gamma \left[\frac{e^{-\alpha x^\beta}}{1+x^c} \{ \alpha \beta x^{\beta-1} + \frac{cx^{c-1}}{(1+x^c)} \} \right] [1 - (1+x^c)^{-1} e^{-\alpha x^\beta}]^{\gamma-1}$$

با استفاده از بسط زیر

$$(1-u)^a = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{a}{j} (-1)^j (u)^j, |u| < 1$$

$f(x)$ را بازنویسی می‌کنیم:

$$\begin{aligned} f(X) &= \gamma \left[\frac{e^{-\alpha x^\beta}}{1+x^c} \{ \alpha \beta x^{\beta-1} + \frac{cx^{c-1}}{(1+x^c)} \} \right] [1 - (1+x^c)^{-1} e^{-\alpha x^\beta}]^{\gamma-1} \\ &= \gamma \left[\frac{e^{-\alpha x^\beta}}{1+x^c} \{ \alpha \beta x^{\beta-1} + \frac{cx^{c-1}}{(1+x^c)} \} \right] \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\gamma-1}{j} (-1)^j \left((1+x^c)^{-1} \right)^j e^{-j\alpha x^\beta} \\ (6) \quad &= \gamma \left[\frac{e^{-\alpha x^\beta}}{1+x^c} \left\{ \alpha \beta x^{\beta-1} + \frac{cx^{c-1}}{(1+x^c)} \right\} \right] \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\gamma-1}{j} (-1)^j \frac{(-j\alpha x^\beta)^n}{n!} \left((1+x^c)^{-1} \right)^j \end{aligned}$$



شکل ۲- تابع خطر توزیع لگ لجستیک وایبل-نمایی-شده به ازای مقادیر مختلف پارامترها

به طور مشابه بسط تابع توزیع تجمعی آن به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}
 F(X) &= [1 - (1 + x^c)^{-1} e^{-\alpha x^\beta}]^\gamma \\
 &= \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\gamma}{j} (-1)^j \left((1 + x^c)^{-1} \right)^j e^{-j\alpha x^\beta} \\
 &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\gamma}{j} (-1)^j \frac{(-j\alpha x^\beta)^n}{n!} \left((1 + x^c)^{-1} \right)^j
 \end{aligned}
 \tag{۷}$$

بنابراین تابع مولد گشتاور توزیع لگ لجستیک وایبل نمایی شده با استفا ده از رابطه (۶) به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} M(x) &= \int_0^{\infty} e^{tx} f(x) dx \\ &= \int_0^{\infty} e^{tx} \gamma \left[\frac{e^{-\alpha x^{\beta}}}{1+x^c} \left\{ \alpha \beta x^{\beta-1} + \frac{cx^{c-1}}{(1+x^c)} \right\} \right] \\ &\quad \times \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\gamma-1}{j} (-1)^j \frac{(-j\alpha x^{\beta})^n}{n!} \left((1+x^c)^{-1} \right)^j dx \end{aligned}$$

در این صورت گشتاور مرتبه r ام آن به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} \mu_r &= E[x^r] \\ &= \int_0^{\infty} x^r \gamma \left[\frac{e^{-\alpha x^{\beta}}}{1+x^c} \left\{ \alpha \beta x^{\beta-1} + \frac{cx^{c-1}}{(1+x^c)} \right\} \right] \\ &\quad \times \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\gamma-1}{j} (-1)^j \frac{(-j\alpha x^{\beta})^n}{n!} \left((1+x^c)^{-1} \right)^j dx \end{aligned} \quad (8)$$

که با استفاده از نرم افزار Matlab و به روش های عددی می توان آن را محاسبه کرد. بر مبنای چهار گشتاور اول چولگی و کشیدگی توزیع لگ لجستیک وایبل نمایی شده از رابطه زیر به دست می آید:

$$S = \frac{\mu_3 - 3\mu_1\mu_2 + 2\mu_1^3}{(\mu_2 - \mu_1^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad K = \frac{\mu_4 - 4\mu_1\mu_3 + 6\mu_1^2\mu_2 - 3\mu_1^4}{(\mu_2 - \mu_1^2)^2}$$

که μ_n گشتاور مرتبه n ام توزیع ارائه شده است. در ادامه عبارتی را برای گشتاورهای ناکامل توزیع لگ لجستیک وایبل نمایی شده را به دست می آوریم که در محاسبه منحنی های بونفرونی و لورنز و همین طور محاسبات مربوط به انحراف از میانگین و میانه کاربرد دارند. فرض کنید X دارای تابع چگالی احتمال رابطه (۴) باشد، در این صورت r امین گشتاور ناکامل این توزیع به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned}
& \int_0^t x^r f(x) dx = \\
& \int_0^t x^r \gamma \left[\frac{e^{-\alpha x^\beta}}{1+x^c} \left\{ \alpha \beta x^{\beta-1} + \frac{c x^{c-1}}{(1+x^c)} \right\} \right] \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\gamma-1}{j} (-1)^j \frac{(-j \alpha x^\beta)^n}{n!} \left((1+x^c)^{-1} \right)^j dx \\
& = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\gamma-1}{j} (-1)^j \\
& \int_0^t x^r \gamma \left[\frac{e^{-\alpha x^\beta}}{1+x^c} \left\{ \alpha \beta x^{\beta-1} + \frac{c x^{c-1}}{(1+x^c)} \right\} \right] \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-j \alpha x^\beta)^n}{n!} \left((1+x^c)^{-1} \right)^j dx \\
& \text{با قرار دادن } w = (1+x^c)^{-1} \text{ داریم:}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^t x^r f(x) dx = \\
& \int_0^t x^r \gamma [w e^{-\alpha x^\beta} \{ \alpha \beta x^{\beta-1} + w c x^{c-1} \}] \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\gamma-1}{j} (-1)^j \frac{(-j \alpha x^\beta)^n}{n!} (w)^j dx
\end{aligned}$$

(۹)

۴- انحراف از میانگین و میانه، معادلات منحنی‌های بونفرونی و لورنز برای توزیع لگ لجستیک وایبل نمایی‌شده

فرض کنید X دارای تابع چگالی احتمال رابطه (۴) باشد، در این صورت انحراف از میانگین و میانه از روابط زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}
\delta_1(X) &= \int_0^{\infty} |X - \mu| f(x) dx = \int_0^{\mu} x f(x) dx - \int_{\mu}^{\infty} x f(x) dx \\
&= \int_0^{\mu} x \gamma \left[\frac{e^{-\alpha x^\beta}}{1+x^c} \left\{ \alpha \beta x^{\beta-1} + \frac{c x^{c-1}}{(1+x^c)} \right\} \right] \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\gamma-1}{j} (-1)^j \frac{(-j \alpha x^\beta)^n}{n!} \left((1+x^c)^{-1} \right)^j dx \\
&\quad - \int_{\mu}^{\infty} x \gamma \left[\frac{e^{-\alpha x^\beta}}{1+x^c} \left\{ \alpha \beta x^{\beta-1} + \frac{c x^{c-1}}{(1+x^c)} \right\} \right] \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\gamma-1}{j} (-1)^j \frac{(-j \alpha x^\beta)^n}{n!} \left((1+x^c)^{-1} \right)^j dx
\end{aligned}$$

(۱۰)

که $I(b) = \int_0^b xf(x)dx$. همچنین اگر M نشان‌دهنده میانه توزیع ذکر شده باشد در این صورت معادلات انحراف از میانه توزیع ذکر شده به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} \delta_v(X) &= \int_0^\infty |X - M|f(x)dx = vMF(M) - M + \mu - vI(M), \\ &= vM \sum_{j=0}^\infty \sum_{n=0}^\infty \binom{\gamma}{j} (-1)^j \frac{(-j\alpha M^\beta)^n}{n!} \left((1 + M^c)^{-1} \right)^j - M + \mu \\ &\quad - v \left(\int_0^M x \gamma [we^{-\alpha x^\beta} \{ \alpha \beta x^{\beta-1} \right. \\ (11) \quad &\quad \left. + wcx^{c-1} \}] \sum_{j=0}^\infty \sum_{n=0}^\infty \binom{\gamma-1}{j} (-1)^j \frac{(-j\alpha x^\beta)^n}{n!} (w)^j dx \right) \end{aligned}$$

در ادامه منحنی های بونفرونی و لورنز را که کاربردهای زیادی در اقتصاد برای بررسی درآمد و فقر، قابلیت اطمینان، پزشکی و بیمه دارند ارائه می‌کنیم. فرض کنید X دارای تابع چگالی احتمال رابطه (۴) باشد در این صورت با استفاده از رابطه (۹) معادلات منحنی بونفرونی به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} B_F[F(x)] &= \frac{1}{\mu F(x)} \int_0^x uf(u)du = \frac{1}{\mu [\sum_{j=0}^\infty \sum_{n=0}^\infty \binom{\gamma}{j} (-1)^j \frac{(-j\alpha x^\beta)^n}{n!} \left((1 + x^c)^{-1} \right)^j]} \\ &\quad \times \left(\int_0^x u \gamma [we^{-\alpha u^\beta} \{ \alpha \beta u^{\beta-1} + wcu^{c-1} \}] \sum_{j=0}^\infty \sum_{n=0}^\infty \binom{\gamma-1}{j} (-1)^j \frac{(-j\alpha u^\beta)^n}{n!} (w)^j du \right) \\ (12) \end{aligned}$$

و معادلات منحنی لورنز نیز به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} L_F[F(x)] &= B_F[F(x)]F(x) = \frac{1}{\mu} \int_0^x uf(u)du = \frac{1}{\mu} \times \left(\int_0^x u \gamma [we^{-\alpha u^\beta} \{ \alpha \beta u^{\beta-1} + \right. \\ &\quad \left. wcu^{c-1} \}] \sum_{j=0}^\infty \sum_{n=0}^\infty \binom{\gamma-1}{j} (-1)^j \frac{(-j\alpha u^\beta)^n}{n!} (w)^j du \right) \\ (13) \end{aligned}$$

که با استفاده از نرم‌افزار Matlab و به روش‌های عددی می‌توان آن را محاسبه کرد.

۵- برآورد درست‌نمایی ماکزیمم پارامترهای (MLE) توزیع لگ لجستیک وایبل نمایی‌شده

اگر $X_1, \dots, X_n$ نمونه ای تصادفی با اندازه n از توزیع لگ لجستیک وایبل نمایی‌شده باشد در این صورت تابع ماکسیمم درست‌نمایی این توزیع به صورت زیر است:

$$L = \gamma^n \prod_{i=1}^n \left[\frac{e^{-\alpha x_i^\beta}}{1 + x_i^c} \{ \alpha \beta x_i^{\beta-1} + \frac{c x_i^{c-1}}{(1 + x_i^c)} \} \right] \prod_{i=1}^n [1 - (1 + x_i^c)^{-1} e^{-\alpha x_i^\beta}]^{\gamma-1}$$

در نتیجه لگاریتم تابع درست‌نمایی به صورت زیر است:

$$l(c, \alpha, \beta, \gamma) = n \log \gamma + \sum_{i=1}^n \log \left[\frac{e^{-\alpha x_i^\beta}}{1 + x_i^c} \{ \alpha \beta x_i^{\beta-1} + \frac{c x_i^{c-1}}{(1 + x_i^c)} \} \right] + (\gamma - 1) \sum_{i=1}^n \log [1 - (1 + x_i^c)^{-1} e^{-\alpha x_i^\beta}] \quad (14)$$

برآورد ماکسیمم درست‌نمایی پارامترها با به حداکثر رساندن تابع لگاریتم درست‌نمایی نسبت به پارامترها به دست می‌آیند. برای این منظور، از لگاریتم تابع درست‌نمایی نسبت به پارامترها مشتق گرفته و برابر صفر قرار می‌دهیم. در نتیجه برآورد ماکسیمم درست‌نمایی پارامترها با حل معادلات غیرخطی زیر به طور همزمان به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \frac{\partial l_n}{\partial c} = & \sum_{i=1}^n \frac{\left(\frac{-(x_i^c \ln x_i)(e^{-\alpha x_i^\beta})}{(1 + x_i^c)^2} \right) \left(\alpha \beta x_i^{\beta-1} + \frac{c x_i^{c-1}}{(1 + x_i^c)} \right)}{\left[\frac{e^{-\alpha x_i^\beta}}{1 + x_i^c} \left\{ \alpha \beta x_i^{\beta-1} + \frac{c x_i^{c-1}}{(1 + x_i^c)} \right\} \right]} \\ & + \sum_{i=1}^n \frac{\left(\frac{(x_i^{c-1} + c x_i^{c-1} \ln x_i)(1 + x_i^c) - (x_i^c \ln x_i)(c x_i^{c-1})}{(1 + x_i^c)^2} \right) \left(\frac{e^{-\alpha x_i^\beta}}{1 + x_i^c} \right)}{\left[\frac{e^{-\alpha x_i^\beta}}{1 + x_i^c} \left\{ \alpha \beta x_i^{\beta-1} + \frac{c x_i^{c-1}}{(1 + x_i^c)} \right\} \right]} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial l_n / \partial \alpha &= \sum_{i=1}^n \frac{\frac{-x_i^\beta e^{-\alpha x_i^\beta}}{1+x_i^c} \left\{ \alpha \beta x_i^{\beta-1} + \frac{c x_i^{c-1}}{(1+x_i^c)} \right\}}{\left[\frac{e^{-\alpha x_i^\beta}}{1+x_i^c} \left\{ \alpha \beta x_i^{\beta-1} + \frac{c x_i^{c-1}}{(1+x_i^c)} \right\} \right]} \\
&\quad + (\gamma - 1) \sum_{i=1}^n \frac{-\left(-x_i^\beta e^{-\alpha x_i^\beta} \right) \left((1+x_i^c)^{-1} \right)}{\left[1 - (1+x_i^c)^{-1} e^{-\alpha x_i^\beta} \right]}, \\
\partial l_n / \partial \beta &= \sum_{i=1}^n \frac{\left(-\alpha x_i^\beta \ln x_i e^{-\alpha x_i^\beta} \right) / (1+x_i^c) \left(\alpha \beta x_i^{\beta-1} + \frac{c x_i^{c-1}}{(1+x_i^c)} \right)}{\left[\frac{e^{-\alpha x_i^\beta}}{1+x_i^c} \left\{ \alpha \beta x_i^{\beta-1} + \frac{c x_i^{c-1}}{(1+x_i^c)} \right\} \right]} \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \frac{\left(\alpha x_i^{\beta-1} + \alpha \beta x_i^{\beta-1} \ln x_i \right) \left(\frac{e^{-\alpha x_i^\beta}}{1+x_i^c} \right)}{\left[\frac{e^{-\alpha x_i^\beta}}{1+x_i^c} \left\{ \alpha \beta x_i^{\beta-1} + \frac{c x_i^{c-1}}{(1+x_i^c)} \right\} \right]} \\
&\quad + (\gamma - 1) \sum_{i=1}^n \frac{\left(-(1+x_i^c)^{-1} \right) \left(-\alpha x_i^\beta \ln x_i e^{-\alpha x_i^\beta} \right)}{\left[1 - (1+x_i^c)^{-1} e^{-\alpha x_i^\beta} \right]}, \\
\partial l_n / \partial \gamma &= \frac{n}{\gamma} + \sum_{i=1}^n \text{Log} \left[1 - (1+x_i^c)^{-1} e^{-\alpha x_i^\beta} \right],
\end{aligned}$$

هیچ فرم بسته‌ای برای برآورد ماکسیمم درست‌نمایی پارامترها وجود ندارد و محاسبات آن باید به صورت عددی با استفاده از یک الگوریتم بهینه‌سازی غیرخطی در محیط نرم‌افزار R انجام شود. به منظور ارائه یک برآورد فاصله‌ای و آزمون فرض برای پارامترها، ماتریس اطلاع فیشر را به دست می‌آوریم که به صورت زیر است:

$$J(\vartheta) = - \begin{bmatrix} I_{cc} & I_{c\alpha} & I_{c\beta} & I_{c\gamma} \\ I_{\alpha c} & I_{\alpha\alpha} & I_{\alpha\beta} & I_{\alpha\gamma} \\ I_{\beta c} & I_{\beta\alpha} & I_{\beta\beta} & I_{\beta\gamma} \\ I_{\gamma c} & I_{\gamma\alpha} & I_{\gamma\beta} & I_{\gamma\gamma} \end{bmatrix},$$

که $\vartheta = (c, \alpha, \beta, \gamma)'$ بردار پارامترها است و عبارات واضحی برای عناصر ماتریس اطلاعات مشاهده شده وجود دارد.

$$\begin{aligned} I_{cc} &= \frac{\partial^2 l}{\partial c^2}, & I_{c\alpha} &= \frac{\partial^2 l}{\partial c \partial \alpha}, & I_{c\beta} &= \frac{\partial^2 l}{\partial c \partial \beta}, & I_{c\gamma} &= \frac{\partial^2 l}{\partial c \partial \gamma} \\ I_{\alpha c} &= \frac{\partial^2 l}{\partial \alpha \partial c}, & I_{\alpha\alpha} &= \frac{\partial^2 l}{\partial \alpha^2}, & I_{\alpha\beta} &= \frac{\partial^2 l}{\partial \alpha \partial \beta}, & I_{\alpha\gamma} &= \frac{\partial^2 l}{\partial \alpha \partial \gamma} \\ I_{\beta c} &= \frac{\partial^2 l}{\partial \beta \partial c}, & I_{\beta\alpha} &= \frac{\partial^2 l}{\partial \beta \partial \alpha}, & I_{\beta\beta} &= \frac{\partial^2 l}{\partial \beta^2}, & I_{\beta\gamma} &= \frac{\partial^2 l}{\partial \beta \partial \gamma} \\ I_{\gamma c} &= \frac{\partial^2 l}{\partial \gamma \partial c}, & I_{\gamma\alpha} &= \frac{\partial^2 l}{\partial \gamma \partial \alpha}, & I_{\gamma\beta} &= \frac{\partial^2 l}{\partial \gamma \partial \beta}, & I_{\gamma\gamma} &= \frac{\partial^2 l}{\partial \gamma^2} \end{aligned}$$

تحت شرایط نظم، استنتاج‌های مجانبی برای بردار پارامترها؛ یعنی $\Theta = (c, \alpha, \beta, \gamma)^T$ بر اساس تقریب نرمال امکان‌پذیر است. توزیع نرمال چند متغیره $N_{\vartheta}(0, I^{-1}(\vartheta))$ می‌تواند برای ایجاد بازه‌های اطمینان دو طرفه $(1 - \eta)$ برای پارامترهای مدل به کار رود که η سطح معناداری است.

۶- مطالعات شبیه‌سازی

در این بخش شبیه‌سازی مونت کارلو را به منظور ارزیابی عملکرد برآورد ماکسیمم درست-نمایی پارامترها برای توزیع لگ لجستیک وایبل نمایی‌شده ارائه می‌دهیم. تعداد تکرارها برابر ۱۰۰۰ است. ارزیابی برآوردها بر مبنای موارد زیر انجام می‌شود:

میانگین توان دوم خطاهای تجربی و برآورد ماکسیمم درست‌نمایی به ازای هر داده شبیه‌سازی شده برای $i=1, \dots, 1000$ به صورت $(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{c}, \hat{\gamma})$ تعیین می‌شوند. مقدار اریبی و میانگین مربعات خطا از فرمول‌های زیر به دست می‌آیند:

$$bias_h(n) = \frac{1}{1000} \sum_{i=1}^{1000} (\hat{h}_i - h);$$

$$MSE_h(n) = \frac{1}{1000} \sum_{i=1}^{1000} (\hat{h}_i - h)^2;$$

نتایج در جدول زیر ارائه شده‌اند که نشان دهنده این است که برآوردهای ماکسیمم درست‌نمایی پارامتر θ دارای اریبی مثبت هستند. نتایج کاملاً پایدار هستند و مهم‌تر این‌که برای این اندازه از نمونه، به مقادیر واقعی نزدیک هستند. علاوه بر این با افزایش اندازه نمونه مقدار MSE کاهش می‌یابد.

۷- کاربردها

در این بخش کاربردهایی از توزیع‌های ارائه شده را بیان می‌کنیم و نشان می‌دهیم که توزیع لگ لجستیک وایبل نمایی شده برازش بهتری را نسبت به سایر مدل‌ها برای مجموعه داده‌های واقعی ارائه شده در این مقاله فراهم می‌کند. برای این منظور توزیع ذکر شده را با توزیع‌های لیندلی و نمایی که تابع چگالی آن‌ها در زیر ارائه شده، مقایسه می‌کنیم. همه محاسبات با استفاده از نرم افزارهای R و Matlab انجام شده‌اند.

لیندلی:

$$f(x) = \frac{\theta^2}{\theta+1} (1+x) e^{-\theta x}, x > 0, \theta > 0$$

جدول ۱- مقادیر اریبی و میانگین مربعات خطای برآوردها تحت روش ماکسیمم درست‌نمایی

اندازه نمونه	مقادیر واقعی				اریبی				(MSE) میانگین مربع خطا			
	α	β	C	γ	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{C}$	$\hat{\gamma}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{C}$	$\hat{\gamma}$
۱۰۰	۰/۵	۰/۵	۲	۱	۰/۰۸	۰/۰۳	۰/۰۱	۰/۱۲	۰/۰۵	۰/۰۴	۰/۰۱	۰/۰۶
	۰/۵	۳	۱	۰/۵	۰/۰۹	۰/۱۱	۰/۲۴	۰/۱۳	۰/۰۵	۰/۰۶	۰/۰۹	۰/۰۲
	۰/۸	۴	۱	۰/۷	۰/۱۲	۰/۱۸	۰/۲۱	۰/۱۴	۰/۱۲	۰/۰۱	۰/۱۴	۰/۰۲
۳۰۰	۰/۵	۰/۵	۲	۱	۰/۰۷	۰/۰۶	۰/۰۲	۰/۰۸	۰/۰۵	۰/۰۶	۰/۰۹	۰/۰۴
	۰/۵	۳	۱	۰/۵	۰/۰۹	۰/۰۷	۰/۰۳	۰/۱۲	۰/۰۵	۰/۰۴	۰/۰۲	۰/۰۷
	۰/۸	۴	۱	۰/۷	۰/۱۱	۰/۰۶	۰/۰۴	۰/۰۹	۰/۰۶	۰/۰۴	۰/۰۱	۰/۰۸
۵۰۰	۰/۵	۰/۵	۲	۱	۰/۰۴	۰/۰۳	۰/۰۱	۰/۰۵	۰/۰۵	۰/۰۶	۰/۰۵	۰/۰۸
	۰/۵	۳	۱	۰/۵	۰/۱۴	۰/۰۵	۰/۰۲	۰/۰۶	۰/۰۴	۰/۰۵	۰/۰۸	۰/۰۳
	۰/۸	۴	۱	۰/۷	۰/۰۶	۰/۰۵	۰/۰۱	۰/۰۸	۰/۰۴	۰/۰۳	۰/۰۱	۰/۰۶

نمایی:

$$f(x) = ce^{-cx}, x > 0, c > 0$$

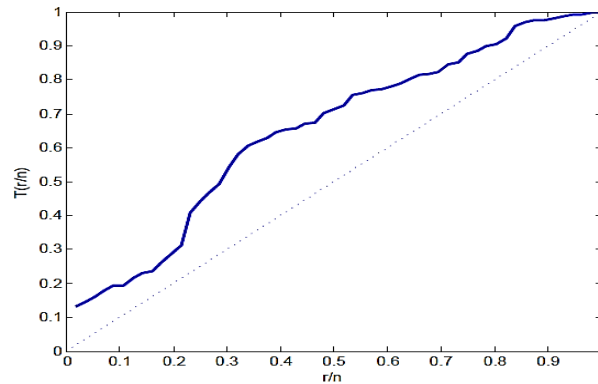
مجموعه داده‌های ارائه شده مربوط به داده‌های درآمد ملی سالهای ۱۳۳۸-۱۳۹۳ (بر حسب میلیارد ریال) مربوط به کشور ایران است که از سایت بانک مرکزی جمهوری اسلامی ایران گرفته شده است.

۱۱۱۲۵۷/۸, ۱۲۴۲۹۸/۴, ۱۳۶۹۸۱/۴, ۱۵۳۷۸۹/۴, ۱۶۶۰۸۴/۹, ۱۶۷۴۲۵/۳, ۱۸۸۸۲۱/۲, ۲۰۲۵۶۴/۷, ۲۰۷۱۷۴/۴, ۲۳۴۱۹۷/۳, ۲۵۸۹۸۲/۰, ۲۸۴۸۳/۵, ۳۸۸۹۸۵/۷, ۴۵۵۲۸۵/۸, ۶۸۹۸۷۴/۲, ۱۰۷۷۶۰۳/۷, ۱۰۶۹۰۵۱/۵, ۱۲۵۹۴۶۵/۵, ۱۱۹۵۴۹۸/۹, ۹۷۷۴۹۲/۵, ۹۹۸۶۲۸/۷, ۶۷۴۶۵۶/۱, ۶۲۳۹۸۴/۰, ۷۵۹۹۸۱/۳, ۸۰۰۰۷۷/۵, ۷۱۸۲۲۴/۰, ۷۱۱۳۵۷/۳, ۵۴۵۷۰۰/۵, ۶۸۵۶۲۶/۳, ۴۲۷۲۳۵/۸, ۴۸۸۴۰۵۰/۳, ۵۸۹۲۵۷/۶, ۶۳۸۴۲۷/۲, ۶۵۱۴۰۹/۶,

۸۸۶۰۹۲/۳, ۸۷۸۱۹۸/۷, ۸۵۵۵۶۶/۲, ۹۰۰۱۵۱/۸, ۸۶۳۲۸۴/۱, ۷۷۹۱۸۴/۷, ۹۲۴۲۵۰/۱,
 ۹۵۵۵۲۱/۶, ۹۸۹۶۳۷/۳, ۱۱۶۳۰۲۹/۱, ۱۲۴۳۸۰۱/۰, ۱۳۳۴۴۲۴/۷, ۱۵۰۷۳۵۹/۸, ۱۶۰۰۳۴۴/۸,
 ۱۷۸۹۹۸۴/۵, ۱۷۷۸۱۷۷/۴, ۱۷۰۴۵۶۵/۱, ۱۸۷۱۶۳۷/۶, ۱۹۹۰۲۶۱/۳, ۱۶۴۹۲۴۸/۱,
 ۱۶۰۶۳۱۶/۰, ۱۵۸۰۳۴۸/۰, ۱۵۸۰۳۴۸/۰

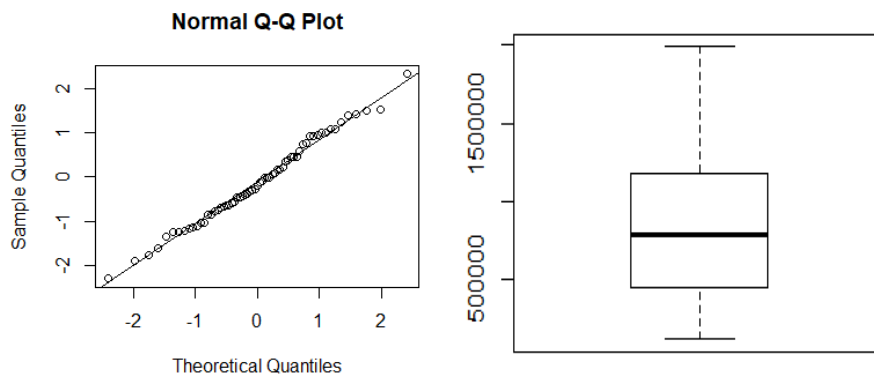
در بسیاری از کاربردها، اطلاعاتی کیفی درباره نمودارهای نرخ شکست وجود دارد که می‌توانند در انتخاب یک مدل مشخص ما را یاری کنند. یک روش آزمون بسیار مفید، استفاده از نمودار (TTT) می‌باشد [۱]. نمودار TTT با استفاده از نمودار $T(r/n) = \left[\left(\sum_{i=1}^r y_{(i)} \right) + (n-r)y_{(r)} \right] / \sum_{i=1}^n y_{(i)}$ در برابر r/n به دست می‌آید که $r = 1, \dots, n$ و $y_{(i)}; (i = 1, \dots, n)$ آماره‌های ترتیبی نمونه می‌باشند. برای تابع نرخ خطر ثابت، نمودار قطری مورب، برای نرخ خطر کاهشی نمودار محدب و برای نرخ خطر افزایشی نمودار مقعر است. اگر تابع نرخ خطر u شکل باشد نمودار ابتدا محدب و سپس مقعر است و اگر تابع نرخ خطر u شکل وارون باشد نمودار ابتدا مقعر و سپس محدب است.

حال نمودار TTT داده‌ها را رسم می‌کنیم. شکل ۳ نمودار TTT مربوط به داده‌ها را نشان می‌دهد که با استفاده از آن می‌توان به ویژگی نرخ خطر داده‌ها پی برد. این نمودار نشان می‌دهد که تابع نرخ خطر مجموعه داده‌ها به صورت افزایشی است، بنابراین توزیع لگ لجستیک وایبل نمایی‌شده برای برازش این داده‌های واقعی مناسب است، زیرا این توزیع تابع نرخ خطر فزاینده‌ای را ارائه می‌دهد.



شکل ۳- نمودار TTT مربوط به داده‌های درآمد ملی

شکل ۴ نمودار احتمال نرمال و نمودار جعبه‌ای مجموعه داده‌ها را ارائه می‌دهد.



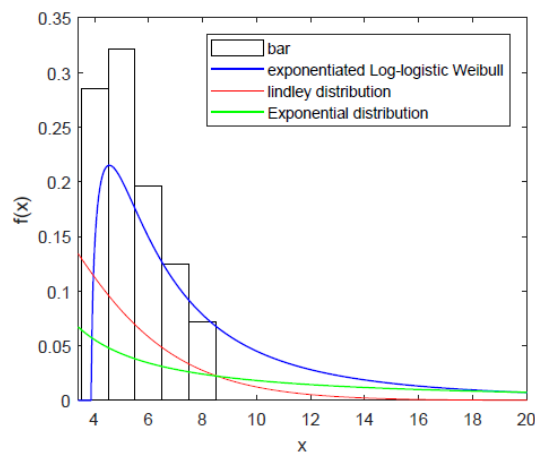
شکل ۴- احتمال نرمال و نمودار جعبه‌ای برای مجموعه داده‌های درآمد ملی

جهت بررسی نیکوئی برازش توزیع‌های آماری ارائه شده با توزیع داده‌های واقعی، از آماره‌های BIC و AIC استفاده گردید. در جدول ۱، MLE داده‌ها، مقدار BIC و AIC برای مجموعه داده‌های واقعی، ارائه شده‌اند. همان‌طور که مشخص است با توجه به معیارهای BIC, AIC (بر اساس کمترین مقدار) توزیع لگ لجستیک وایبل نمایه شده بهترین برازش را برای این مجموعه از داده‌ها فراهم می‌کند.

جدول ۲- برآورد ماکسیمم درست‌نمایی پارامترها و آزمون نیکویی برازش برای مجموعه داده‌های واقعی

Set	Model	Parameter estimates				AIC	BIC
		α	β	C	γ		
I	لیندلی	—	۰/۱۰۶۰	—	—	۵۰۳۶۵	۱۰۰۷۲
	نمایی	—	—	۰/۰۰۰۰۱۱۱۷	—	۱۵۳۱۰	۱۵۳۳۰
	لگ لجستیک وایبل نمایی شده	۰/۴۴۹۴۷	۰/۹۸۰۴	۱/۹۴۳۶	۲/۸۶۲	۱۴۳۷/۷	۱۴۳۷/۰۰۱

در شکل ۵ نمودار تابع چگالی احتمال چندین توزیع و هیستوگرام داده‌های واقعی ارائه شده، جهت انتخاب بهترین توزیع برای برازش به داده‌ها رسم شده است. همانطور که از شکل‌ها مشخص است توزیع ذکر شده، نسبت به سایر مدل‌های رقیب، برازش بهتری را روی این مجموعه از داده‌ها فراهم می‌کند.



شکل ۵ - نمودار تابع چگالی احتمال برازش داده شده ی توزیع های در نظر گرفته به همراه هیستوگرام برای مجموعه داده‌های درآمد ملی

۸- نتیجه‌گیری و چند پیشنهاد برای کار

در این مقاله ویژگی‌ها و کاربردهایی از توزیع لگ لجستیک وایبل نمایی‌شده بیان و ارائه شد. این مدل نسبت به سایر مدل‌ها دارای فرم‌های ساده تابع توزیع و چگالی به لحاظ ریاضی بوده و دارای ۴ پارامتر است. تابع نرخ خطر این توزیع به صورت افزایشی، کاهشی، U - شکل و U - شکل وارون با توجه به مقادیر مختلف پارامترهایش است. به عنوان نتیجه کلی، می‌توان گفت که توزیع لگ لجستیک وایبل نمایی‌شده مکانیسم نسبتاً انعطاف‌پذیری برای برازش طیف وسیعی از مجموعه داده‌های واقعی مثبت فراهم می‌کند و بنابراین می‌تواند جایگزین مناسبی برای داده‌های آرایه شده در این مقاله، در الگوبندی داده‌های واقعی در زمینه‌های اقتصاد، مهندسی، تحلیل بقا و مسائل هیدرولوژیکی باشد. بیشتر محاسبات و شکل‌ها با استفاده از نرم افزار Matlab و R انجام شده است. چندین ویژگی از این توزیع در این مقاله ارائه نشده است که امیدواریم در تحقیقات آینده مورد بررسی قرار گیرند. برخی از این ویژگی‌ها عبارتند از: آماره‌های ترتیبی، گشتاورهای آماره ترتیبی، توزیع مجانبی آماره‌های اکسترم، ترتیب‌های تصادفی، آنتروپی و آنتروپی تجمعی باقیمانده، توزیع نسبت دو متغیر تصادفی. همچنین موضوع‌های استنباطی نیز می‌تواند زمینه‌ای برای تحقیق در آینده را فراهم آورد. برخی از این موضوع‌ها عبارتند از: برآوردیابی بیزی پارامترها، برآوردیابی بر اساس انواع سانسورها، برآوردیابی به کمک روش‌های دیگر مانند روش کمترین مربعات قطری، پیش‌بینی مشاهده‌های آینده از این توزیع و غیره.

توضیحات

1. Log-Logistic Rayleigh
2. Exponentiated Log-Logistic
3. Log-Logistic
4. Exponentiated Log-Logistic Weibull

مرجع‌ها

- [1] Aarset, M.V. (1987). How to Identify a Bathtub Hazard Rate. *IEEE Transactions on Reliability*, **36**, 106-108.

- [2] Abdollahi Nanvapisheh, A., MirMostafaei, S.M.T.K., Altun, E. (2019). A New Two-Parameter Distribution: Properties and Applications. *Journal of Mathematical Modeling*, **7**, 35-48.
- [3] Bourguignon, M., Silva, R.B., Cordeiro, G.M. (2014). The Weibull-G Family of Probability Distributions. *Journal of Data Science*, **12**, 53-68.
- [4] Elbatal, I., Zubair, A., Elgarhy, M., Almarashi, A.M. (2018). A New Alpha Power Transformed Family of Distributions: Properties and Applications to the Weibull Model. *J. Nonlinear Sci.*, **12**, 1-20.
- [5] Gupta, R.D., Kundu, D. (2001). Exponentiated Exponential Family: An Alternative to Gamma and Weibull Distributions. *Biometrical Journal*, **43**, 117-130.
- [6] Gómez, Y., Bolfarine, H., Gómez Geraldo, H. (2019). Gumbel Distribution with Heavy Tails and Applications to Environmental Data. *MATCOM*, **157**, 115-129.
- [7] Haupt, E., Schabe, H. (1992). A New Model for a Lifetime Distribution with Bathtub Shaped Failure Rate. *Microelectronics Reliability*, **32**, 633-639.
- [8] Hjorth, U. (1980). A Reliability Distribution with Increasing, Decreasing, Constant and Bathtub- Shaped Failure Rates. *Technometrics*, **22**, 99-107.
- [9] khazaei, S., Abdollahi Nanvapisheh, A. (2021). The Comparison Between Gumbel and Exponentiated Gumbel Distributions and Their Applications in Hydrological Process. *Adv Mach Lear Art Inte*, **2**, 49-54.
- [10] Lee, C., Famoye, F., Olumolade, O. (2007). Beta-Weibull Distribution: Some Properties and Applications to Censored Data. *Journal of Modern Applied Statistical Methods*, **6**, 173-186.
- [11] Mudholkar, G.S., Srivastava, D.K. (1993). Exponentiated Weibull Family for Analyzing Bathtub Failure-Rate Data. *IEEE Transactions on Reliability*, **42**, 299-302.
- [12] Oluyede, B., Foya, S., Warahena-Liyanage, G., Huang, S. (2016). The Log-Logistic Weibull Distribution with Applications to Lifetime Data. *Austrian J. Stat*, **45**, 43-69.
- [13] Oluyede, B.O., Basele, G., Huang, S., Makubate, B. (2016). A New Class of Generalized Log-Logistic Weibull Distribution: Theory, Properties and Applications. *Journal of Probability and Statistical Sciences*, **14**, 171.

آنی‌تا عبداللهی نانواپیشه

دانشجوی دکتری

کرمانشاه، دانشگاه رازی.

رایانشانی: anita.abdollahi@yahoo.com

عاطفه عبداللهی نانواپیشه

کارشناس ارشد ریاضی

کرمانشاه، دانشگاه رازی.