

توزیع رایلی لوماکس نمایی شده، ویژگی‌ها و کاربردها

آنی‌تا عبدالهی نانواپیشه

دانشگاه رازی کرمانشاه

چکیده. در این مقاله یک توزیع طول عمر چهار پارامتری جدید به نام توزیع رایلی لوماکس نمایی شده معرفی می‌شود که دارای نرخ خطر افزایشی و U شکل برای مدل‌بندی داده‌های طول عمر (قابلیت اطمینان) است. توزیع لوماکس در اقتصاد، بیمه، مدل‌های قابلیت اطمینان، طول عمر، مسائل صف‌بندی و علوم بیولوژیکی کاربرد دارد. در این مقاله ابتدا ویژگی‌های ریاضی و آماری توزیع پیشنهادی ارائه می‌شود، سپس کاربردهای توزیع جدید با استفاده از مجموعه داده‌های واقعی بیان می‌شود. گشتاورهای حول مبدا و میانگین و عباراتی برای چولگی و کشیدگی ارائه می‌شود. ویژگی‌های مختلف ریاضی و آماری توزیع جدید بیان می‌گردد. برآورد پارامترها با استفاده از روش ماکسیمم درستنمایی مورد بررسی قرار می‌گیرد و در نهایت دو کاربرد از توزیع جدید با استفاده از مجموعه داده‌های طول عمر واقعی و درآمد ارائه می‌شود. خواهیم دید که توزیع رایلی لوماکس نمایی شده (E-RL) برازش بهتری را نسبت به سایر مدل‌ها برای مجموعه داده‌های طول عمر و درآمد فراهم می‌کند. واژه‌های کلیدی: توزیع لوماکس، توزیع رایلی لوماکس نمایی شده، گشتاورها، داده‌های طول عمر و درآمد، برآورد پارامترها و نیکویی برازش

۱- مقدمه

توزیع لوماکس یا به عبارت دیگر توزیع پارتو نوع دوم، یک توزیع احتمال با دمه‌های سنگین است که در اقتصاد، بیمه، علوم بیولوژیکی، نظریه‌ی صف و مدل‌های ترافیک اینترنتی کاربرد دارد [۹ و ۱۱]. این توزیع به‌طور گسترده در مدل‌های طول عمر و قابلیت اطمینان مورد استفاده قرار می‌گیرد [۴].

توزیع لوماکس از نظر بیزی توسط بسیاری از نویسندگان مورد بحث و بررسی قرار گرفته است [۲]. برآوردهای بیزی توزیع لوماکس توسط هولادر و حسین مورد بررسی قرار گرفته است [۸]. گیتانی و همکاران توزیع مارشال آلکین و لوماکس تعمیم یافته را مورد بررسی قرار داده اند [۷]. کرامر و شیدت اطلاعات ریسک توزیع لوماکس سانسور شده نوع دوم را مورد بررسی قرار داده اند [۵].

تابع چگالی احتمال توزیع لوماکس با پارامتر شکل λ و پارامتر مقیاس β به صورت زیر است [۳]:

$$(۱) \quad f(x) = \lambda \beta (1 + \beta x)^{-(\lambda+1)}, x \geq 0, \lambda, \beta > 0.$$

تابع بقای متناظر با رابطه (۱) به صورت زیر است:

$$(۲) \quad S(x) = (1 + \beta x)^{-\lambda}$$

ویژگی های دیگر این توزیع توسط آرنولد ارائه شده است [۳]. هدف از این مقاله ارائه یک توزیع چهار پارامتری جدید است که دارای نرخ خطر افزایشی و u شکل بوده که در مدل بندی داده های درآمد و طول عمر بسیار مفید است. در بخش دوم مقاله، مدل جدید و ویژگی های آن و نمودار تابع چگالی احتمال و نرخ خطر را ارائه می کنیم. در بخش سه گشتاورها و گشتاورهای ناقص مدل جدید را بیان می کنیم. در بخش چهار، برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامترها را ارائه می کنیم. در بخش پنج کاربردهایی از توزیع جدید را بیان کرده و انعطاف پذیری این توزیع را برای مجموعه داده های واقعی ارائه می دهیم و در نهایت در بخش شش نتیجه گیری خواهیم کرد.

۲- مدل جدید و ویژگی های آن

متغیر تصادفی X دارای توزیع لوماکس رایلی با سه پارامتر است اگر تابع توزیع تجمعی آن به صورت زیر است [۹]:

$$(۳) \quad F(x) = 1 - e^{-\frac{\beta}{2}(\frac{\theta}{\theta+x})^{-2\lambda}}, \quad x \geq -\theta, \theta, \beta, \lambda > 0.$$

که θ, β پارامتر مقیاس و λ پارامتر شکل است. تابع چگالی احتمال متناظر با توزیع (۳) به صورت زیر است:

$$(۴) \quad F(x) = \frac{\beta\lambda}{\theta} \left(\frac{\theta}{\theta+x}\right)^{-\beta\lambda+1} e^{\frac{-\beta}{\gamma} \left(\frac{\theta}{\theta+x}\right)^{-\beta\lambda}}, \quad x \geq -\theta, \quad \theta, \beta, \lambda > 0.$$

حال فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع توزیع متناظر با رابطه (۳) باشد، در این صورت تابع توزیع نمایی شده؛ توزیع E-RL به صورت زیر است:

$$(۵) \quad F(x) = [1 - e^{\frac{-\beta}{\gamma} \left(\frac{\theta}{\theta+x}\right)^{-\beta\lambda}}]^\gamma; \quad x > -\theta, \quad \beta, \lambda, \theta, \gamma > 0.$$

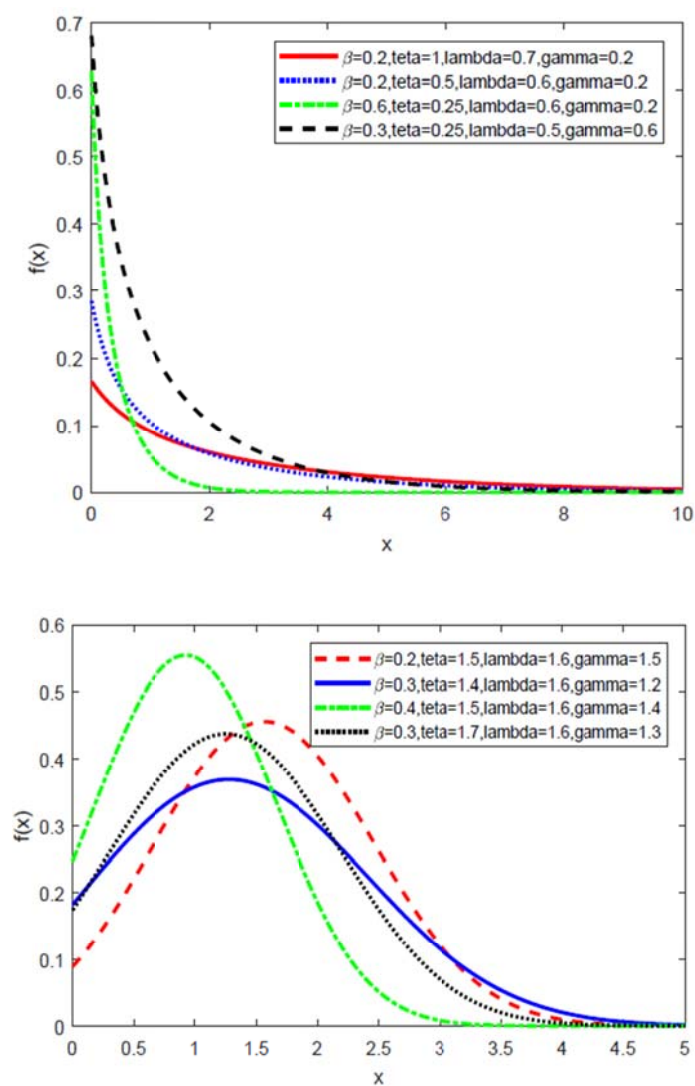
با مشتق‌گیری از رابطه بالا تابع چگالی احتمال این توزیع از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$(۶) \quad f(x) = \gamma \left(\frac{\beta\lambda}{\theta} \left(\frac{\theta}{\theta+x}\right)^{-\beta\lambda+1} e^{\frac{-\beta}{\gamma} \left(\frac{\theta}{\theta+x}\right)^{-\beta\lambda}} \right) \times [1 - e^{\frac{-\beta}{\gamma} \left(\frac{\theta}{\theta+x}\right)^{-\beta\lambda}}]^{\gamma-1}; \quad x > -\theta, \quad \beta, \lambda, \theta, \gamma > 0.$$

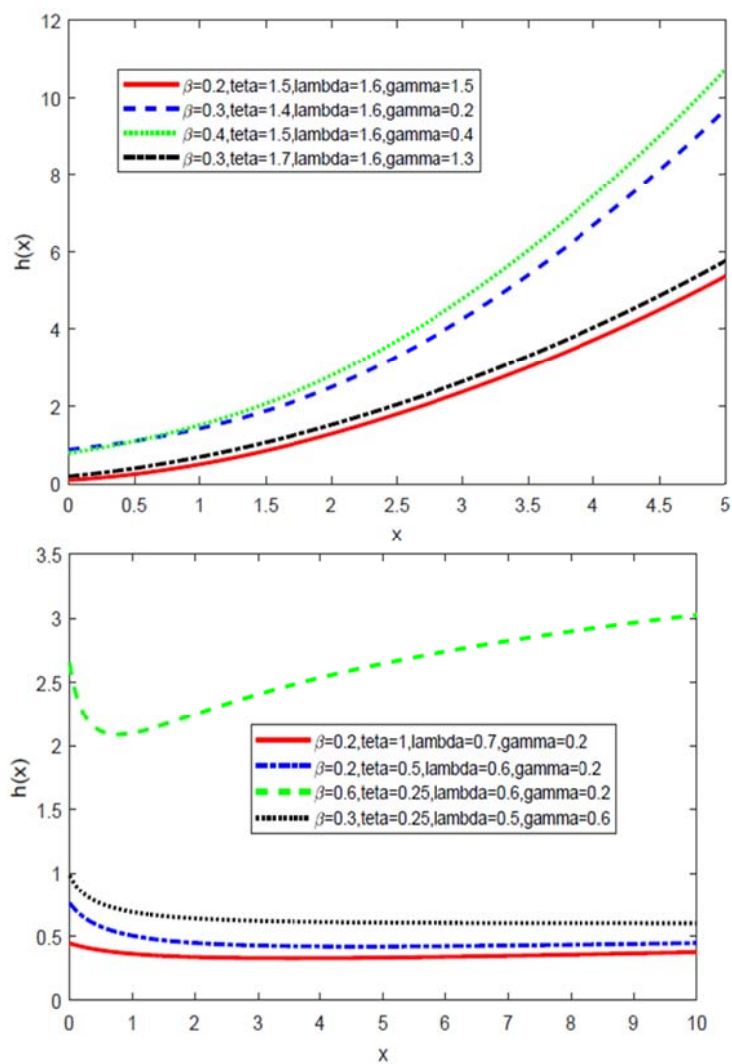
تابع نرخ خطر این توزیع نیز به صورت زیر است:

$$h(x) = \frac{\gamma(\beta\lambda \left(\frac{\theta}{\theta+x}\right)^{-\beta\lambda+1} (e^{\frac{-\beta}{\gamma} \left(\frac{\theta}{\theta+x}\right)^{-\beta\lambda}})) [1 - e^{\frac{-\beta}{\gamma} \left(\frac{\theta}{\theta+x}\right)^{-\beta\lambda}}]^{\gamma-1}}{1 - [1 - e^{\frac{-\beta}{\gamma} \left(\frac{\theta}{\theta+x}\right)^{-\beta\lambda}}]^\gamma}.$$

تابع خطر بر خلاف نرخ تغییرات بقا تعریف می‌شود، که در هر زمان t ارزیابی می‌شود. بنا بر این شکل تابع خطر دلالت مهمی بر پویایی مدت دارد. در شکل زیر تابع چگالی احتمال توزیع (E-RL) به ازای مقادیر مختلف پارامترها رسم شده است. همان‌طور که مشخص است تابع چگالی احتمال این توزیع کاهشی و u شکل وارون نسبت به مقادیر پارامترهایش است. در شکل ۲ نمودار تابع نرخ خطر توزیع ارائه شده به ازای مقادیر مختلف پارامترها نشان داده شده است. همان‌طور که مشخص است تابع نرخ خطر این توزیع به ازای تمامی مقادیر به صورت افزایشی و u شکل نسبت به مقادیر پارامترهایش است.



شکل ۱- تابع چگالی احتمال توزیع (E-RL) به ازای مقادیر مختلف پارامترها



شکل ۲- تابع خطر توزیع (E-RL) به ازای مقادیر مختلف پارامترها

۳- گشتاورهای توزیع (E-RL)

گشتاورها نقش مهمی را در تحلیل‌های آماری ایفا می‌کنند. آن‌ها در بیان ویژگی‌ها و رفتارهای یک توزیع کاربرد بسیاری دارند. در این بخش به ارائه بسط $f(x)$ که در محاسبه گشتاورها مورد نیاز است می‌پردازیم. با استفاده از بسط دوجمله‌ای داریم:

$$\begin{aligned} f(x) &= \gamma \left(\frac{\beta\lambda}{\theta} \right) \left(\left(\frac{\theta}{\theta+x} \right)^{-\gamma\lambda+1} e^{\frac{\beta}{\gamma} \left(\frac{\theta}{\theta+x} \right)^{-\gamma\lambda}} \right) \left(1 - e^{\frac{-\beta}{\gamma} \left(\frac{\theta}{\theta+x} \right)^{-\gamma\lambda}} \right)^{\gamma-1} \\ (7) \quad &= \gamma \left(\frac{\beta\lambda}{\theta} \right) \left(\frac{\theta}{\theta+x} \right)^{-\gamma\lambda+1} e^{\frac{\beta}{\gamma} \left(\frac{\theta}{\theta+x} \right)^{-\gamma\lambda}} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{\gamma-1}{j} e^{\frac{-j\beta}{\gamma} \left(\frac{\theta}{\theta+x} \right)^{-\gamma\lambda}} \end{aligned}$$

بنابراین تابع مولد گشتاور این توزیع با استفاده از رابطه بالا به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} (8) \quad M(x) &= \int_0^{\infty} e^{tx} f(x) dx \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{\gamma-1}{j} \int_0^{\infty} \gamma \left(\frac{\beta\lambda}{\theta} \right) \left(\frac{\theta}{\theta+x} \right)^{-\gamma\lambda+1} e^{-\frac{(j-1)\beta}{\gamma} \left(\frac{\theta}{\theta+x} \right)^{-\gamma\lambda} + tx} dx \end{aligned}$$

با استفاده از نرم‌افزار MATLAB و MAPLE می‌توان به راحتی مقدار رابطه (۸) را به صورت عددی محاسبه نمود. گشتاور مرتبه r ام توزیع ارائه شده از رابطه زیر به دست می‌آید که می‌تواند با استفاده از نرم‌افزار MAPLE محاسبه شود:

$$\begin{aligned} (9) \quad E[X^r] &= \int_0^{\infty} x^r f(x) dx \\ &= \int_0^{\infty} x^r \gamma \left(\frac{\beta\lambda}{\theta} \right) \left(\frac{\theta}{\theta+x} \right)^{-\gamma\lambda+1} e^{\frac{\beta}{\gamma} \left(\frac{\theta}{\theta+x} \right)^{-\gamma\lambda}} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{\gamma-1}{j} e^{\frac{-j\beta}{\gamma} \left(\frac{\theta}{\theta+x} \right)^{-\gamma\lambda}} dx \end{aligned}$$

بر مبنای چهار گشتاور اول، چولگی و کشیدگی توزیع جدید از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$S = E[(X - E(X))^3] / (E[(X - E(X))^2])^{3/2} = (\mu_3 - 3\mu_1\mu_2 + 2\mu_1^3) / [\mu_2 - \mu_1^2]^{3/2}$$

و

$$K = E[(X - E(X))^4] / (E[(X - E(X))^2])^2 = (\mu_4 - 4\mu_1\mu_3 + 6\mu_2^2 - 3\mu_1^4) / [\mu_2 - \mu_1^2]^2$$

که μ_r گشتاور مرتبه r ام و S و K به ترتیب ضریب چولگی و کشیدگی توزیع ارائه شده هستند.

۴- برآورد ماکسیم درست‌نمایی پارامترها (MLE)

اگر $X_1, \dots, X_n$ نمونه‌ای تصادفی با اندازه n از توزیع E-RL باشند در این صورت تابع ماکسیم درست‌نمایی این توزیع به صورت زیر است:

$$L(x|\beta, \lambda, \theta, \gamma) = \left(\frac{\gamma\beta\lambda}{\theta}\right)^n e^{-\frac{\beta}{\gamma} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\theta}{\theta+x}\right)^{-\gamma\lambda}} \prod_{i=1}^n \left[\frac{\theta}{\theta+x}\right]^{-\gamma\lambda+1} \left[1 - e^{-\frac{\beta}{\gamma} \left(\frac{\theta}{\theta+x}\right)^{-\gamma\lambda}}\right]^{\gamma-1}$$

در نتیجه لگاریتم تابع درست‌نمایی به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} l(x|\beta, \lambda, \theta, \gamma) &= n \log \gamma + n \log \beta + n \log \lambda - n \log \theta - \frac{\beta}{\gamma} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\theta}{\theta+x}\right)^{-\gamma\lambda} \\ &\quad + (-\gamma\lambda + 1) \sum_{i=1}^n \log\left(\frac{\theta}{\theta+x}\right) \\ &\quad + (\gamma - 1) \sum_{i=1}^n \log\left(1 - e^{-\frac{\beta}{\gamma} \left(\frac{\theta}{\theta+x}\right)^{-\gamma\lambda}}\right) \end{aligned}$$

با مشتق‌گیری از رابطه بالا نسبت به پارامترها و برابر صفر قرار دادن آن‌ها داریم:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L(\beta, \lambda, \theta, \gamma)}{\partial \beta} &= \frac{n}{\beta} - \frac{1}{\gamma} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\theta}{\theta+x}\right)^{-\gamma\lambda} \\ &\quad + (\gamma - 1) \sum_{i=1}^n \left(\frac{\left(\frac{\theta}{\theta+x}\right)^{-\gamma\lambda} e^{-\frac{\beta}{\gamma} \left(\frac{\theta}{\theta+x}\right)^{-\gamma\lambda}}}{1 - e^{-\frac{\beta}{\gamma} \left(\frac{\theta}{\theta+x}\right)^{-\gamma\lambda}}} \right) = 0, \\ \frac{\partial \ln L(\beta, \lambda, \theta, \gamma)}{\partial \lambda} &= \frac{n}{\lambda} + \beta \sum_{i=1}^n \left(\frac{\theta}{\theta+x}\right)^{-\gamma\lambda} \left(\sum \log\left(\frac{\theta}{\theta+x}\right) \right) - \gamma \sum_{i=1}^n \log\left(\frac{\theta}{\theta+x}\right) \end{aligned}$$

$$+(\gamma - 1) \sum_{i=1}^n \frac{\frac{\beta}{\gamma} \left(\left(\frac{\theta}{\theta+x} \right)^{-\gamma\lambda} \left(-\gamma \log \left(\frac{\theta}{\theta+x} \right) \right) \right) e^{-\frac{\beta}{\gamma} \left(\frac{\theta}{\theta+x} \right)^{-\gamma\lambda}}}{\left(1 - e^{-\frac{\beta}{\gamma} \left(\frac{\theta}{\theta+x} \right)^{-\gamma\lambda}} \right)} = 0 ,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L(\beta, \lambda, \theta, \gamma)}{\partial \theta} &= -\frac{n}{\theta} + \beta\lambda \sum_{i=1}^n \left(\frac{x}{(\theta+x)^\gamma} \right) \left(\frac{\theta}{\theta+x} \right)^{-\gamma\lambda-1} \\ &\quad + (-\gamma\lambda + 1) \sum_{i=1}^n \frac{\left(\frac{x}{(\theta+x)^\gamma} \right)}{\left(\frac{\theta}{\theta+x} \right)} \\ &\quad - (\gamma - 1) \sum_{i=1}^n \frac{\beta\lambda \left(\frac{x}{(\theta+x)^\gamma} \right) \left(\frac{\theta}{\theta+x} \right)^{-\gamma\lambda-1} e^{-\frac{\beta}{\gamma} \left(\frac{\theta}{\theta+x} \right)^{-\gamma\lambda}}}{\left(1 - e^{-\frac{\beta}{\gamma} \left(\frac{\theta}{\theta+x} \right)^{-\gamma\lambda}} \right)} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \ln L(\beta, \lambda, \theta, \gamma)}{\partial \gamma} = \frac{n}{\gamma} + \sum_{i=1}^n \log \left(1 - e^{-\frac{\beta}{\gamma} \left(\frac{\theta}{\theta+x} \right)^{-\gamma\lambda}} \right) = 0 .$$

معادلات بالا دارای عبارت صریحی نیستند، بنابراین با استفاده از روش‌های عددی می‌توان پارامترها را محاسبه نمود. به منظور ساخت فاصله اطمینان تقریبی و آزمون فرض روی پارامترها، نیاز به ماتریس اطلاع داریم. ماتریس اطلاع مشاهده شده به صورت زیر است:

$$I_n(\theta) = - \begin{bmatrix} I_{\beta\beta} & I_{\beta\lambda} & I_{\beta\theta} & I_{\beta\gamma} \\ I_{\lambda\beta} & I_{\lambda\lambda} & I_{\lambda\theta} & I_{\lambda\gamma} \\ I_{\theta\beta} & I_{\theta\lambda} & I_{\theta\theta} & I_{\theta\gamma} \\ I_{\gamma\beta} & I_{\gamma\lambda} & I_{\gamma\theta} & I_{\gamma\gamma} \end{bmatrix}$$

که $\theta = (\beta, \lambda, \theta, \gamma)^T$ عبارات واضحی برای عناصر ماتریس اطلاع مشاهده شده وجود دارد.

$$\begin{aligned}
I_{\beta\beta} &= \frac{\partial^2 l}{\partial \beta^2}, & I_{\beta\lambda} &= \frac{\partial^2 l}{\partial \beta \partial \lambda}, & I_{\beta\theta} &= \frac{\partial^2 l}{\partial \beta \partial \theta}, & I_{\beta\gamma} &= \frac{\partial^2 l}{\partial \beta \partial \gamma} \\
I_{\lambda\beta} &= \frac{\partial^2 l}{\partial \lambda \partial \beta}, & I_{\lambda\lambda} &= \frac{\partial^2 l}{\partial \lambda^2}, & I_{\lambda\theta} &= \frac{\partial^2 l}{\partial \lambda \partial \theta}, & I_{\lambda\gamma} &= \frac{\partial^2 l}{\partial \lambda \partial \gamma} \\
I_{\theta\beta} &= \frac{\partial^2 l}{\partial \theta \partial \beta}, & I_{\theta\lambda} &= \frac{\partial^2 l}{\partial \theta \partial \lambda}, & I_{\theta\theta} &= \frac{\partial^2 l}{\partial \theta^2}, & I_{\theta\gamma} &= \frac{\partial^2 l}{\partial \theta \partial \gamma} \\
I_{\gamma\beta} &= \frac{\partial^2 l}{\partial \gamma \partial \beta}, & I_{\gamma\lambda} &= \frac{\partial^2 l}{\partial \gamma \partial \lambda}, & I_{\gamma\theta} &= \frac{\partial^2 l}{\partial \gamma \partial \theta}, & I_{\gamma\gamma} &= \frac{\partial^2 l}{\partial \gamma^2}
\end{aligned}$$

تحت شرایطی که برای پارامترها در خارج از فضای پارامتری انجام می‌شود نه روی مرزها [۱۱]، توزیع مجانبی $\sqrt{n}(\hat{\Theta} - \Theta)$ همگرا به توزیع $(\vartheta, I^{-1}(\vartheta))$ است که $I(\vartheta)$ ماتریس اطلاع مورد انتظار است. توزیع نرمال چندمتغیره $(\vartheta, I^{-1}(\vartheta))$ می‌تواند برای ایجاد بازه‌های اطمینان دوطرفه $(1 - \eta)(100\%)$ درصدی برای پارامترهای مدل به کار رود که η سطح معناداری است.

۵- کاربردها

در این بخش کاربردهایی از توزیع ارائه شده را بیان می‌کنیم و نشان می‌دهیم که توزیع E-RL برازش بهتری را نسبت به سایر مدل‌ها برای مجموعه داده‌های درآمد و طول عمر فراهم می‌کند. ما این توزیع را با توزیع‌های طول عمر وایبول لوماکس، لوماکس نمایشی شده و توزیع رایلی لوماکس مقایسه می‌کنیم که توسط کوثر فاطیما و همکاران ارائه شد [۹]. همه محاسبات با استفاده از نرم‌افزارهای R و MATLAB انجام شده‌اند. اولین مجموعه از داده‌های ارائه شده، مربوط به داده‌های درآمد (میلیارد ریال) ملی کشور ایران در سال‌های ۱۹۵۹-۲۰۱۴ است که از بانک مرکزی ایران دریافت شده است.

۱۱۱۲۵۷/۸، ۱۲۴۲۹۸/۴، ۱۳۶۹۸۱/۴، ۱۵۳۷۸۹/۴، ۱۶۶۰۸۴/۹، ۱۶۷۴۲۵/۳،
 ۱۸۸۸۲۱/۲، ۲۰۲۵۶۴/۷، ۲۰۷۱۷۴/۴، ۲۳۴۱۹۷/۳، ۲۵۸۹۸۲/۰، ۲۸۴۸۳۰/۵،
 ۳۸۸۹۸۵/۷، ۴۵۵۲۸۵/۸، ۶۸۹۸۷۴/۲، ۱۰۷۷۶۰۳/۷، ۱۰۶۹۰۵۱/۵، ۱۲۵۹۴۶۵/۵،
 ۱۱۹۵۴۹۸/۹، ۹۷۷۴۹۲/۵، ۹۹۸۶۲۸/۷، ۶۷۴۶۵۶/۱، ۶۲۳۹۸۴/۰، ۷۵۹۹۸۱/۳،

۸۰۰۰۷۷/۵, ۷۱۸۲۲۴/۰, ۷۱۱۳۵۷/۳, ۵۴۵۷۰۰/۵, ۶۸۵۶۲۶/۳, ۴۲۷۲۳۵/۸,
 ۴۸۴۰۵۰/۳, ۵۸۹۲۵۷/۶, ۶۳۸۴۲۷/۲, ۶۵۱۴۰۹/۶, ۸۸۶۰۹۲/۳, ۸۷۸۱۹۸/۷,
 ۸۵۵۵۶۶/۲, ۹۰۰۱۵۱/۸, ۸۶۳۲۸۴/۱, ۷۷۹۱۸۴/۷, ۹۲۴۲۵۰/۱, ۹۵۵۵۲۱/۶,
 ۹۸۹۶۳۷/۳, ۱۱۶۳۰۲۹/۱, ۱۲۴۳۸۰۱/۰, ۱۳۳۴۴۲۴/۷, ۱۵۰۷۳۵۹/۸,
 ۱۶۰۰۳۴۴/۸, ۱۷۸۹۹۸۴/۵, ۱۷۷۸۱۷۷/۴, ۱۷۰۴۵۶۵/۱, ۱۸۷۱۶۳۷/۶,
 ۱۹۹۰۲۶۱/۳, ۱۶۴۹۲۴۸/۱, ۱۶۰۶۳۱۶/۰, ۱۵۸۰۳۴۸/۰

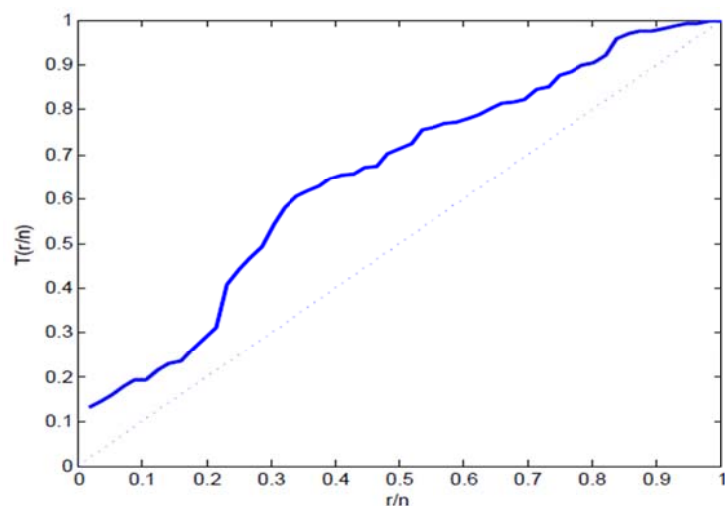
دومین مجموعه از داده‌ها مربوط به زمان خرابی ۸۴ مورد شیشه جلو هواپیما است که توسط مورتی و همکاران ارائه شده است [۱۳] (در حالت کلی نرخ خطر یا نرخ شکست، معیاری است برای سنجیدن شکست یک سیستم در یک بازه زمانی مشخص).

۰/۰۴۰, ۱/۸۶۶, ۲/۳۸۵, ۳/۴۴۳, ۰/۳۰۱, ۱/۸۷۶, ۲/۴۸۱, ۳/۴۶۷, ۰/۳۰۹, ۱/۸۹۹, ۲/۶۱۰,
 ۳/۴۷۸, ۰/۵۵۷, ۱/۹۱۱, ۲/۶۲۵, ۳/۵۷۸, ۰/۹۴۳, ۱/۹۱۲, ۲/۶۳۲, ۳/۵۹۵, ۱/۰۷۰, ۱/۹۱۴,
 ۲/۶۴۶, ۳/۶۹۹, ۱/۱۲۴, ۱/۹۸۱, ۲/۶۶۱, ۳/۷۷۹, ۱/۲۴۸, ۲/۰۱۰, ۲/۶۸۸, ۳/۹۲۴, ۱/۲۸۱,
 ۲/۰۳۸, ۲/۸۲, ۳, ۴/۰۳۵, ۱/۲۸۱, ۲/۰۸۵, ۲/۸۹۰, ۴/۱۲۱, ۱/۳۰۳, ۲/۰۸۹, ۲/۹۰۲, ۴/۱۶۷,
 ۱/۴۳۲, ۲/۰۹۷, ۲/۹۳۴, ۴/۲۴۰, ۱/۴۸۰, ۲/۱۳۵, ۲/۹۶۲, ۴/۲۵۵, ۱/۵۰۵, ۲/۱۵۴, ۲/۹۶۴,
 ۴/۲۷۸, ۱/۵۰۶, ۲/۱۹۰, ۳/۰۰۰, ۴/۳۰۵, ۱/۵۶۸, ۲/۱۹۴, ۳/۱۰۳, ۴/۳۷۶, ۱/۶۱۵, ۲/۲۲۳,
 ۳/۱۱۴, ۴/۴۴۹, ۱/۶۱۹, ۲/۲۲۴, ۳/۱۱۷, ۴/۴۸۵, ۱/۶۵۲, ۲/۲۲۹, ۳/۱۶۶, ۴/۵۷۰, ۱/۶۵۲,
 ۲/۳۰۰, ۳/۳۴۴, ۴/۶۰۲, ۱/۷۵۷, ۲/۳۲۴, ۳/۳۷۶, ۴/۶۶

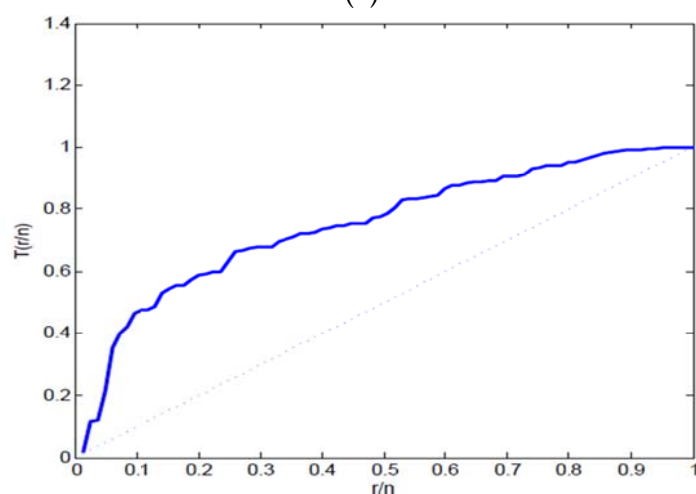
در بسیاری از کاربردها، اطلاعاتی کیفی درباره نمودارهای نرخ شکست وجود دارد که می‌توانند در انتخاب یک مدل مشخص ما را یاری کنند. یک روش آزمون بسیار مفید، استفاده از نمودار TTT ^۲ است [۲]. نمودار TTT با استفاده از نمودار $=(\sum_{i=1}^n y_{i:n}) + (n-r)y_{r:n} / \sum_{i=1}^n y_{i:n} T(r/n)$ در برابر r/n به دست می‌آید.

که $r = 1, \dots, n$ و $i = 1, \dots, n$ و $y_{i:n}$ آماره‌های ترتیبی نمونه هستند. برای تابع نرخ شکست ثابت، نمودار قطری مورب، برای نرخ شکست کاهشی، نمودار محدب و برای نرخ شکست افزایشی، نمودار مقعر است. اگر تابع نرخ شکست u شکل باشد نمودار ابتدا مقعر و سپس محدب است. نمودارهای TTT مربوط به داده‌های ارائه شده برای

داده‌های درآمد ملی (a) و برای زمان خرابی شیشه‌های جلوی هواپیما (b) در شکل‌های زیر رسم شده‌اند.



(a)



(b)

شکل ۳- نمودارهای TTT مربوط به داده‌های ارائه شده

به منظور بررسی نیکوئی برازش توزیع‌های آماری ارائه شده برای توزیع داده‌های واقعی، از آزمون K-S (کلموگروف-اسمیرنوف) و شاخص‌های AIC و BIC استفاده شد. در

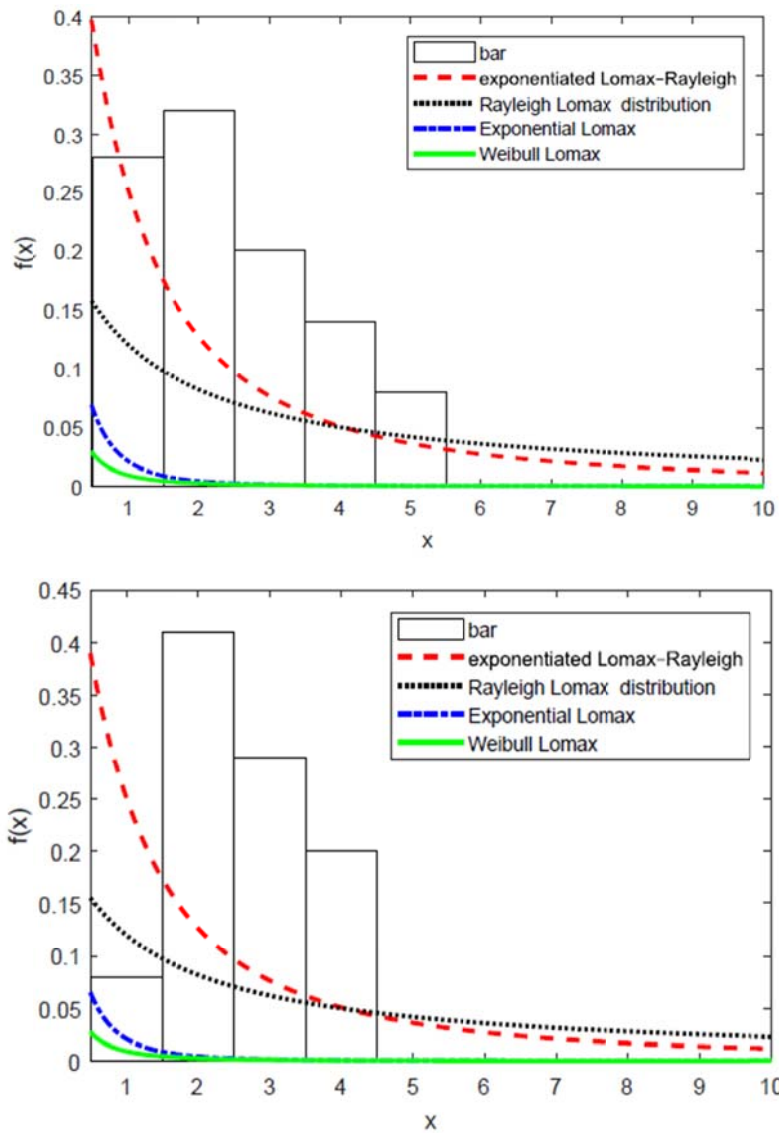
جدول ۲، MLE داده‌ها و آزمون کلموگروف-اسمیرنوف، مقدار AIC و BIC برای مجموعه داده‌های واقعی، ارائه شده‌اند. همان‌طور که مشخص است با توجه به معیارهای AIC، BIC (بر اساس کمترین مقدار) مدل ارائه شده بهترین برازش را برای مجموعه داده‌ها فراهم می‌کند.

جدول ۱- برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامترها و آزمون نیکویی برازش برای مجموعه داده‌های واقعی

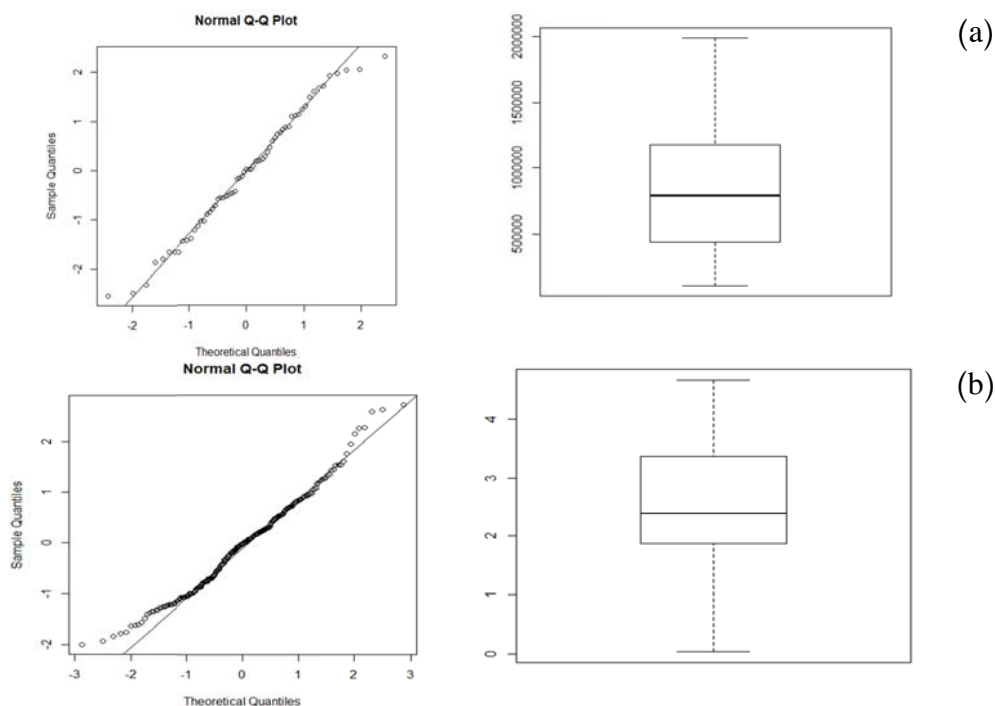
Data set	Model	Parameter estimates				(K-S)	AIC	BIC
		β	set θ	λ	γ			
I	New model	۰/۰۹۰۸۶۳۷	۰/۵۶۱۱۲۹۸	۰/۲۲۸۲۸۶۵	۰/۸۵۷۳۰۲۲	۰/۴۶۸۶	۲۹/۴۷۵۱	۳۴/۶۱۲۳
	Weibull	۲/۰۶۵۴۰۰	۰/۷۲۴۶۰۵۸	۰/۲۹۶۷۴۷۱	۱/۴۷۸۸۱۷۷	۰/۵۴۲۱	۳۱/۶۸۹۵	۳۹/۵۶۷۵
	Lomax							
	exponential	۱/۶۷۳۰۷۸۸	-	۰/۵۸۰۹۴۹	۰/۰۷۵۳۸۹۳	۰/۵۳۶۸	۳۱/۲۵۶۱	۳۷/۸۱۲۴
	Lomax							
II	Rayleigh	۰/۸۱۱۲۴۹	۰/۵۰۷۰۰۲	۰/۴۲۳۰۷۴	-	۰/۵۳۲۴	۳۰/۷۰۷۶	۳۶/۷۲۹۶
	Lomax							
	New model	۰/۴۰۵۱۹	۰/۲۰۶۷۸	۳۹۵۳۸	۰/۰۴۴۵۵	۰/۱۲۳۵	۲۶۳/۱۴۷۳	۲۶۸/۴۵۲۱
	Weibull	۰/۰۱۴۸	۱/۶۴۴۱	۴/۷۶۰۵	۰/۸۶۰۰	۰/۲۱۸۲	۲۶۳/۸۴۹۵	۲۷۳/۶۲۰۱
	Lomax							
	exponential	۲/۸۸۷۵	-	۰/۰۰۴۹	۰/۵۴۶۵	۰/۱۸۹۳	۲۶۳/۸۵۸۶	۲۷۱/۱۸۶۶
	Lomax							
	Rayleigh	۱/۵۹۷	۰/۶۶۷۸	۰/۰۰۹۳	-	۰/۱۴۵۹	۲۶۳/۲۵۴۲	۲۷۰/۵۸۲۲
	Lomax							

همان‌طور که از جدول مشخص است توزیع جدید نسبت به سایر توزیع‌ها دارای کمترین مقدار آماره آزمون است و این بدان معنی است که توزیع E-RL نسبت به سایر توزیع‌ها برازش بهتری را برای این مجموعه از داده‌های واقعی فراهم می‌کند. در شکل زیر نمودار تابع چگالی احتمال چندین توزیع و هیستوگرام داده‌های واقعی ارائه شده، برای انتخاب بهترین توزیع برای برازش به داده‌ها رسم شده است.

همچنین نمودار احتمال نرمال و نمودار جعبه‌ای برای مجموعه داده‌های I و II در شکل ۵ نمایش داده شده‌اند. همان‌طور که از شکل‌ها مشخص است توزیع E-RL، نسبت به سایر مدل‌ها، برازش بهتری را روی این مجموعه از داده‌ها فراهم می‌کند.



شکل ۴- نمودارهای تابع‌های چگالی احتمال برازش داده شده‌ی توزیع‌های مورد نظر به همراه هیستوگرام مربوط به داده‌های ارائه شده برای داده‌های درآمد ملی (شکل بالا) و برای زمان خرابی شیشه‌های جلوی هواپیما (شکل پایین).



شکل ۵- نمودار احتمال نرمال و نمودار جعبه‌ای برای مجموعه داده‌های I (a) و II (b)

۶- بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله، مدل جدیدی از توزیع لوماکس به نام توزیع رایلی لوماکس نمایش داده شده (E-RL) ارائه و ویژگی‌های آن بیان شد. این مدل نسبت به سایر مدل‌ها دارای فرم‌های ساده تابع توزیع و چگالی به لحاظ ریاضی بوده و دارای ۴ پارامتر است. تابع نرخ خطر این توزیع تنها به صورت افزایشی و U شکل برحسب به مقادیر پارامترهایش است. به منظور بررسی نیکویی برازش توزیع‌های آماری ارائه شده برای توزیع داده‌های واقعی، از آماره‌های آزمون مختلفی استفاده شد که همگی تأیید کردند که مدل ارائه شده بهترین برازش را برای مجموعه داده‌های ارائه شده فراهم می‌کند.

به طور کلی می‌توان گفت که توزیع ارائه شده مکانیسم نسبتاً انعطاف‌پذیری برای برازش طیف وسیعی از مجموعه داده‌های واقعی مثبت (داده‌های طول عمر) و داده‌های اقتصاد

فراهم می‌کند و بنابراین می‌تواند جایگزین مناسبی برای الگوهای موجود دیگر در منابع، در الگوبندی داده‌های واقعی در زمینه‌های اقتصاد، مهندسی، تحلیل بقا و مسائل هیدرولوژیکی باشد. چندین ویژگی از این توزیع در این مقاله ارائه نشده است که امیدواریم در تحقیقات آینده مورد بررسی قرار گیرند. برخی از این ویژگی‌ها عبارت‌اند از: آماره‌های ترتیبی، گشتاورهای آماره ترتیبی، توزیع مجانبی آماره‌های اکسترم، ترتیب‌های تصادفی، آنتروپی و آنتروپی تجمعی باقیمانده، توزیع نسبت دو متغیر تصادفی. همچنین موضوع‌های استنباطی نیز می‌تواند زمینه‌ای برای تحقیق در آینده را فراهم آورد. برخی از این موضوع‌ها عبارت‌اند از: برآوردیابی بیزی پارامترها، برآوردیابی بر اساس انواع سانسورها، برآوردیابی به کمک روش‌های دیگر مانند روش کم‌ترین مربعات قطری، پیش‌بینی مشاهده‌های آینده از این توزیع و غیره.

توضیحات

1. Exponentiated Rayleigh Lomax
2. Total time on test

مرجع‌ها

- [1] Aarset, M.V. (1987). How to Identify Bathtub Hazard Rate, IEEE Transactions on Reliability, 36, 106–108.
- [2] Arnold, B.C., Castillo, E. and Sarabia, J.M. (1998). Bayesian Analysis for Classical Distributions Using Conditionally Specified Priors, Sankhya B, 60, 228–245
- [3] Arnold, B.C. (1983). Pareto Distributions, Silver Spring, Maryland: International Cooperative Publishing House.
- [4] Balkema, A. and de Haan, L. (1974). Residual Life Time at Great Age, Annals of Probability, 2, 792 –804.
- [5] Cramer, E. and Schmiedt, A.B. (2001). Progressively Type-II Censored

- Competing Risks Data from Lomax Distributions, Computational Statistics and Data Analysis, 55, 1285–1303.
- [6] Chen, J., Addie, R.G., Zukerman, M. and Neame, T.D. (2015). Performance Evaluation of a Queue Fed by a Poisson Lomax Burst Process, IEEE Communications letters, 19, 367–370.
- [7] Ghitany, M.E., Al-Awadhi, F.A. and Alkhalfan, L.A. (2007). Marshal-Olkin Extended Lomax Distribution and Its Application to Censored Data, Communications in Statistics Theory and Methods, 36, 1855–1866.
- [8] Howlader, H.A. and Hossain, A.M. (2002). Bayesian Survival Estimation of Pareto Distribution of the Second Kind based on Failure-censored Data, Computational Statistics and Data Analysis, Vol. B, 301–314.
- [9] Kawsar, F., Uzma, J. and Ahmad, S.P. (2018). Statistical Properties of Rayleigh Lomax distribution with applications in Survival Analysis, Journal of Data Science. 531–548.
DOI: 10.6339/JDS.201807_16(3).0005
- [10] Lehmann, E.L. and Casella, G. (1998). Theory of Point Estimation, Second Edition, Springer-Verlag, New York.
- [11] Lomax, K.S. (1954). Business Failures; Another Example of the Analysis of Failure Data. Journal of the American Statistical Association, 49, 847–852.
- [12] Murthy, D.N.P., Xi, M. and Jiangs, R. (2004). Weibull Models, Wiley.
- [13] Johnson, N.L., Kotz, S. and Balakrishnan, N. (1994). 20 Pareto Distributions. Continuous Univariate Distributions. 1 (2nd ed.). New York: Wiley.

آنیتا عبدالمی نانواپیشه

دانشجوی دکتری دانشگاه رازی کرمانشاه

کرمانشاه، دانشگاه رازی کرمانشاه.

رایانشانی: anita.abdollahi@yahoo.com