

استنباط بیزی و کلاسیک در توزیع نمایی دو پارامتری با داده‌های سانسور شده تصادفی

اچ. کریشنا و ان. گل

مترجم: فاطمه گودرزی معصومی

دانشگاه پیام نور تهران

چکیده: در این مقاله پارامترهای مکان و مقیاس توزیع نمایی دو پارامتری به روش بیزی و کلاسیک با داده‌های سانسور تصادفی برآورد می‌شود. با توجه به اهمیت پارامتر مکانی، در زمان سانسور توزیع‌های نمایی دو پارامتری با پارامتر مکانی یکسان ولی پارامتر مقیاس مختلف در نظر گرفته می‌شود. از آنجایی که تاکنون استنباط درباره پارامتر مکان با داده سانسور تصادفی مورد بحث قرار نگرفته، برآزش و استفاده از توزیع نمایی در بازه $(0, \infty)$ به ویژه هنگامی که حداقل مشاهدات در مجموعه داده‌ها به طور قابل توجهی بزرگ است، تخمین‌هایی به مراتب دقیق‌تر ارائه می‌دهد. بنابراین در ابتدا برآورد ماکسیم درست‌نمایی، واریانس و فاصله اطمینان مجانبی پارامترها ارائه و در ادامه برخی دیگر از روش‌های برآورد کلاسیک از جمله روش گشتاوری، L - گشتاور و کمترین مربعات نیز به کار گرفته می‌شود. سپس برآورد بیزی پارامترها با استفاده از نمونه‌گیری گیبس تحت تابع زیان آنتروپی تعمیم‌یافته با توزیع پیشین گاما معکوس و فواصل اطمینان HPD مورد بحث قرار می‌گیرد. در ادامه برخی از قابلیت اطمینان و ویژگی‌های تجربی برآوردگرها با استفاده

Krishna, H. and Goel, N. (2017). Classical and Bayesian Inference in Two Parameter Exponential Distribution with Randomly Censored Data. Computational Statistics, 33, 249-275.

دریافت: ۱۳۹۹/۶/۱۷، پذیرش: ۱۳۹۹/۱۲/۱۳.

از یک مطالعه شبیه سازی مونت کارلو مقایسه و برآورد کارا پیشنهاد می شود. در پایان دو نمونه داده واقعی برای نشان دادن اهمیت پارامتر مکان آورده شده است.

واژگان کلیدی: سانسور تصادفی؛ برآورد ماکسیم درستنمایی؛ برآورد بیزی؛ قابلیت اطمینان و ویژگی های تجربی.

۱- مقدمه

تجزیه و تحلیل بقاء روشی برای تجزیه و تحلیل داده های زمان بقاء است که این داده ها زمان واقعه هستند، که زمینه های تولید کاربردی آن در پزشکی، زیست شناسی، آزمایشات بالینی، بهداشت عمومی، اپیدمیولوژی، مهندسی، اقتصاد و جمعیت شناسی است و در نظریه قابلیت اطمینان به عنوان داده های طول عمر و یا زمان خرابی شناخته می شوند. برای بررسی ویژگی های ناشناخته جامعه، از مدل های مختلف آماری در تجزیه و تحلیل قابلیت اطمینان از جمله توزیع های وایبول و بور نوع XII و غیره استفاده می شود. جمع آوری داده های بقا به طور کامل یک کار پرهزینه و وقت گیر است. و به این نکته باید توجه داشت که انواع مختلف طرح سانسور در آزمایش های طول عمر، مانند سانسور معمولی نوع I و نوع II، سانسور فزاینده و سانسور هیبرید مورد استفاده قرار می گیرد. در بسیاری از این طرح های سانسور، زمان سانسور شدن یا تعداد آیت های سانسور شده پیش بینی می شود. در عمل ما اغلب در شرایطی قرار داریم که تعدادی آزمایش به صورت تصادفی حذف می شود. برای نمونه در آزمایشات بالینی یک بیمار ممکن است قبل از اتمام درمان با اختار قبلی از رده خارج و یا بمیرد. به طور مشابه، در مهندسی قابلیت اطمینان، ممکن است لازم باشد یک آیت از یک آزمایش قبل از خرابی کامل آن، به علت شکستن یا صرفه جویی در وقت و پول، از آزمایش خارج شود. هنگامی که اشیاء به طور تصادفی در زمان های مختلف از آزمایش حذف می شوند، سانسور تصادفی شناخته می شوند. سانسور تصادفی توسط گیلبرت (۱۹۶۲) معرفی شد. این نوع سانسور قبلاً توسط [۳]، کرولی، کوزیول، گرین (۱۹۷۶)، سورگو و هوروات مورد بررسی قرار گرفته بود. کیم (۱۹۹۳) با استفاده از آزمون نیکویی برازش داده های تصادفی سانسور شده را مورد بحث قرار داد. بعدها، با داده های تصادفی سانسور شده، [۱۳]، والاوداحی (۲۰۰۲)، [۱۰]، [۱]، [۱۷]،

[۱۸] توزیع‌های مختلفی نظیر نمایی، ریلی، بور نوع ۲ و غیره را تجزیه و تحلیل کرد و اخیراً، [۸] و اسلم (۲۰۱۴) برآورد بیزی برای سانسور نمایی تعمیم‌یافته ارائه داده‌اند.

۲- هدف مطالعه

در تمام مطالعات فوق، زمان شکست و همچنین زمان سانسور از صفر شروع می‌شود. در عمل، اکثر موارد دارای زمان شکست کمتری هستند که به عنوان دوره گارانتی شناخته می‌شوند. بنابراین از پارامتر مکان، بر برآوردها بر اساس داده‌های طول عمر تأثیر می‌گذارد، که باعث می‌شود که برآورد، بسیار پیچیده‌تر از وقتی که پارامتر مکان در نظر گرفته نمی‌شود. در این مقاله، برآورد کلاسیک و بیزی پارامترها با داده‌های تصادفی سانسور شده برای مدل نمایی دو پارامتری مورد بحث قرار می‌گیرد. حداقل زمان معمول برای شکست و سانسور شدن برابر گرفته شده است.

معرفی یک آستانه یا حداقل دوره گارانتی در قالب یک پارامتر مکان در مدل‌سازی داده‌های بقا بسیار مهم است، به ویژه هنگامی که مینیمم مشاهده، در مجموعه داده‌ها، بسیار بزرگ است. در صورت عدم موفقیت، برآوردهای ما از خصوصیات جامعه مانند میانگین، عملکرد بقا، نرخ شکست و غیره، به دور از دقت خواهد بود. این نمود در بخش ۶ مقاله با مجموعه داده‌های واقعی ارائه می‌شود.

ادامه مقاله به شرح زیر است: در بخش ۲ فرمول‌بندی ریاضی برای سانسور تصادفی، نمایی دو پارامتری با عنوان شکست و توزیع زمان سانسور داده می‌شود. در بخش ۳ برآورد حداکثر درست‌نمایی و واریانس برآوردها، فواصل اطمینان آستانه محاسبه می‌شود. برآورد با استفاده از روش‌های گشتاوری، L -گشتاور و کمترین مربعات به‌دست می‌آیند. بخش ۴ فرمول‌بندی روش برآورد بیزی با استفاده از اهمیت روش‌های نمونه‌گیری تحت تابع زیان آنروپی تعمیم‌یافته با پیشین گاما معکوس توضیح داده می‌شود. فواصل معتبر چگالی پسین مضاعف (HPD) با استفاده از الگوریتم چناد شو [۵] به‌دست می‌آید.

بخش ۵، برآورد قابلیت اطمینان و مشخصات تجربی را مطرح می‌کند. بخش ۶ با مطالعه شبیه‌سازی مونت کارلو به بررسی ویژگی‌های برآوردهای مختلف توسعه‌یافته در بخش‌های قبلی پرداخته است. در بخش ۷ مجموعه داده واقعی، برای نشان دادن

روش‌های برآورد ایجاد شده در این مقاله، را تحلیل می‌کنیم. در اینجا ضروری است اشاره کنیم که برای محاسبات در طول مقاله از نرم‌افزار آماری R استفاده شده است. فرض کنید n عنصر با طول عمرها آزمون $X_1, X_2, \dots, X_n$ که مستقل و هم‌توزیع هستند به ترتیب دارای توابع چگالی $f_X(x, \mu, \theta)$ و توزیع $F_X(x, \mu, \theta)$ و همچنین فرض کنید $T_1, T_2, \dots, T_n$ زمان سانسور تصادفی آنها، به ترتیب دارای تابع چگالی و توزیع $f_T(t, \mu, \lambda)$ و $F_T(t, \mu, \lambda)$ و علاوه بر آن X_i و T_i ها مستقل و ناسازگار باشند. با توجه به تعریف متغیرهای تصادفی، اگر بین X_i ها و T_i ها، فقط یک واقعیت مشاهده و زمان واقعی مشاهده با $Y_i = \min(X_i, T_i)$ نشان داده شود، با تعریف متغیر نشانگر D_i به صورت

$$D_i = \begin{cases} 1 & \text{if } x_i \leq T_i \\ 0 & \text{if } x_i > T_i \end{cases}$$

نتیجه می‌شود که متغیر تصادفی D_i دارای تابع چگالی احتمال

$$P[D_i = j] = p^j (1 - p)^{(1-j)}; \quad j = 0, 1$$

است، به طوری که $p = P[X_i \leq T_i]$ است. با فرض اینکه متغیرهای زمان بقا X و زمان سانسور T مستقل و به ترتیب دارای توزیع‌های نمایی دو پارامتری با توابع چگالی

$$f(x|\mu, \theta) = \frac{1}{\theta} e^{-(x-\mu)/\theta}; \quad \theta > 0, \quad 0 \leq \mu \leq x \leq \infty$$

و

$$(1) \quad f(t|\mu, \lambda) = \frac{1}{\lambda} e^{-(t-\mu)/\lambda}; \quad \lambda > 0, \quad 0 \leq \mu \leq t \leq \infty$$

باشند. به طوری که پارامتر μ ، پارامتر آستانه حداقل زمان عمر یا دوره گارانتی را مشخص کند. احتمال شکست یک مورد قبل از سانسور شدن برابر است با:

$$p = P[\text{شکست یک مورد}] = P[D = 1] = P[X \leq T]$$

$$= \int_{\mu}^{\infty} P[X \leq T | T = t] f_T(t) dt = \frac{\lambda}{(\lambda + \theta)}$$

توجه داشته باشید که رابطه اخیر به پارامتر μ بستگی ندارد. چون X_i و T_i مستقل هستند، نتیجه می‌شود متغیرهای Y_i و D_i مستقل و دارای تابع چگالی توأم هستند،

$$f_{Y,D}(y_i, d_i, \mu, \theta, \lambda) = \{f_X(y_i, \mu, \theta)(1 - FT(y_i, \mu, \lambda))\}^{d_i}$$

$$\begin{aligned} & \{f_T(y_i, \mu, \lambda)(1 - F_X(y_i, \mu, \theta))\}^{(1-d_i)} \\ &= \left(\frac{1}{\theta^{d_i}}\right) \left(\frac{1}{\lambda^{(1-d_i)}}\right) e^{-\left(\frac{1}{\theta} + \frac{1}{\lambda}\right)(y_i - \mu)} \\ &= \left(\frac{1}{\theta^{d_i}}\right) \left(\frac{1}{\lambda^{(1-d_i)}}\right) e^{-(y_i - \mu)} \end{aligned}$$

$$(2) \quad y_i > \mu, \lambda, \theta \geq 0, d_i = 0, 1, \beta = \frac{1}{\theta} + \frac{1}{\lambda}$$

با توجه به رابطه ۲ توزیع حاشیه‌ای Y_i توزیع نمایی دو پارامتری $\text{EXP}(\mu, \beta)$ و توزیع حاشیه‌ای D_i توزیع برنولی $B(1, P)$ به ترتیب دارای تابع چگالی:

$$(3) \quad f(Y_i | \mu, \theta, \lambda) = \beta e^{-\beta(y_i - \mu)}; \quad y_i > \mu \quad \theta, \lambda > 0$$

$$(4) \quad P(D_i = d_i) = \left(\frac{\lambda}{\lambda + \theta}\right)^{d_i} \left(\frac{\theta}{\lambda + \theta}\right)^{(1-d_i)}; \quad d_i = 0, 1$$

هستند. با توجه به روابط (۳) و (۴) امید ریاضی متغیرهای Y_i و D_i به ترتیب با

$$E(D_i) = \frac{\lambda}{\lambda + \theta} = p \quad \text{و} \quad E(Y_i) = \mu + \frac{1}{\beta}$$

۳- برآورد به روش کلاسیک

در این بخش برای برآورد ماکسیم درستنمایی پارامترها، تابع درستنمایی برای یک نمونه سانسور تصادفی برابر است با:

$$\begin{aligned} L = L(\tilde{Y}, \tilde{D}) &= \prod_{i=1}^n f(y_i, d_i, \mu, \theta, \lambda) \\ &= \theta^{(-\sum_{i=1}^n d_i)} \lambda^{-(n - \sum_{i=1}^n d_i)} e^{-n\beta(y_{(1)} - \mu)} e^{-\beta \sum_{i=1}^n (y_{(i)} - y_{(1)})} \\ (5) \quad &\{I_{(\mu, \infty)}(y_{(1)})\}; \quad y_i, \mu, \theta, \lambda > 0 \end{aligned}$$

که در آن تابع نشانگر برابر است با:

$$I_{(\mu, \infty)}(y_{(1)}) = \begin{cases} 1 & \text{when } y_{(1)} \geq \mu \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

به طوری که $y_{(1)} = \min(y_1, y_2, \dots, y_n)$ است. با توجه به رابطه (۵) لگاریتم تابع درستنمایی برابر است با:

$$\begin{aligned} \text{Log } L = & -\sum_{i=1}^n d_i \log \theta - \left(n - \sum_{i=1}^n d_i \right) \log \lambda - n \left(\frac{1}{\theta} + \frac{1}{\lambda} \right) (y_{(1)} - \mu) \\ & - \sum_{i=1}^n (y_{(i)} - y_{(1)}) \left(\frac{1}{\theta} + \frac{1}{\lambda} \right) + \log(I_{(\mu, \infty)}(y_{(1)})) \end{aligned} \quad (۶)$$

همانطور که می‌دانیم براورد ماکسیمم درستنمایی μ برابر است با $\hat{\mu} = y_{(1)}$ (برای اطلاع بیشتر به شینها (۱۹۸۶) مراجعه کنید). همچنین با در نظر گرفتن

$$w_1 = \sum_{i=1}^n d_i, \quad w_2 = \sum_{i=1}^n (y_{(i)} - y_{(1)})$$

می‌توان رابطه (۶) را به صورت

$$\text{Log } L = -w_1 \log \theta - (n - w_1) \log \lambda - w_2 \left(\frac{1}{\theta} + \frac{1}{\lambda} \right) \quad (۷)$$

نوشت، که از حل دو معادله $\frac{d \log L}{d \theta} = \frac{d \log L}{d \lambda} = 0$ براوردهای ماکسیمم درستنمایی به ترتیب برابرند با:

$$\hat{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^n (y_{(i)} - y_{(1)})}{n - \sum_{i=1}^n d_i} = \frac{w_2}{n - w_1} \quad \text{و} \quad \hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^n (y_{(i)} - y_{(1)})}{\sum_{i=1}^n d_i} = \frac{w_2}{w_1}$$

قابل ذکر است، براوردهای ماکسیمم درستنمایی را می‌توان به روش بیزی تحت تابع زیان $l_0 - 1$ ، با فرض اینکه توزیع پیشین یکنواخت است نیز به دست آورد.

۳-۱- واریانس MLE

همانطور که می‌دانیم، آماره مرتبه اول یا $y_{(1)}$ دارای نمایی دو پارامتری $(\text{EXP}(\mu, \frac{\beta}{n}))$ است. بنابراین میانگین و واریانس آن به ترتیب برابر است با:

$$\hat{V}(\hat{\mu}) = \frac{\hat{\beta}^2}{n^2} = \frac{1}{(\sum_{i=1}^n (y_{(i)} - y_{(1)}))^2} = w_2^{-2} \quad \text{و} \quad E(\hat{\mu}) = E(y_{(1)}) = \mu + \frac{\beta}{n}$$

که در آن $\hat{\mu} = y_{(1)}$ برای μ یک برآوردگر نااریب نیست اما سازگار است. پس از برآورد μ ، مسئله‌ی برآورد پارامترهای θ و λ است که از ماتریس اطلاع فشر برای به دست آوردن واریانس پارامترها استفاده می‌شود. برای این منظور مشتقات مرتبه دوم لگاریتم تابع درستنمایی به ترتیب برابرند با:

$$\frac{(\partial^2 \log L)}{\partial \theta^2} = \frac{w_1}{\theta^2} - \frac{2w_2}{\theta^3}$$

$$\frac{(\partial^2 \log L)}{\partial \lambda^2} = \frac{n-w_1}{\lambda^2} - \frac{2w_2}{\lambda^3}$$

$$\frac{\partial^2 \log L}{\partial \lambda \partial \theta} = \frac{\partial^2 \log L}{\partial \theta \partial \lambda} = 0$$

بنابراین ماتریس اطلاع فشر بردار (θ, λ) برابر است با:

$$I(\theta, \lambda) = -E \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \log L}{\partial \theta^2} & \frac{\partial^2 \log L}{\partial \lambda \partial \theta} \\ \frac{\partial^2 \log L}{\partial \lambda \partial \theta} & \frac{\partial^2 \log L}{\partial \lambda^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda(n-2)}{\theta^2(\theta+\lambda)} & 0 \\ 0 & \frac{\theta(n-2)}{\lambda^2(\theta+\lambda)} \end{pmatrix}$$

چون ماتریس اطلاع فشر یا $I(\theta, \lambda)$ یک ماتریس قطری است، به راحتی می‌توان معکوس آن با وارون کردن جملات روی قطر اصلی به دست آورد. بنابراین با توجه به قطر اصلی ماتریس معکوس اطلاع فشر، واریانس‌های برآوردگرها است که به ترتیب برابرند با:

$$V(\hat{\theta}) = \frac{\theta^2(\theta+\lambda)}{\lambda(n-2)}, \quad V(\hat{\lambda}) = \frac{\lambda^2(\theta+\lambda)}{\theta(n-2)}$$

واریانس‌ها دارای پارامترهای مجهول λ و θ هستند. که برآورد آنها از جایگزین برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامترهای θ و λ در واریانس آنها به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\hat{V}(\hat{\lambda}) = \frac{\hat{\lambda}^r (\hat{\theta} + \hat{\lambda})}{\hat{\theta} (n-r)} = \frac{n (\sum_{i=1}^n (y_{(i)} - y_{(1)}))^r}{(n-r)(n - \sum_{i=1}^n d_i)^r} = \frac{n w_r^r}{(n-r)(n - w_r)^r}$$

$$\hat{V}(\hat{\theta}) = \frac{\hat{\theta}^r (\hat{\theta} + \hat{\lambda})}{\hat{\lambda} (n-r)} = \frac{n (\sum_{i=1}^n (y_{(i)} - y_{(1)}))^r}{(n-r)(\sum_{i=1}^n d_i)^r} = \frac{n w_r^r}{(n-r)(w_r)^r}$$

۲-۳- فواصل اطمینان مجانبی

چون آماره مرتبه اول یا $y_{(1)}$ دارای نمایی دو پارامتری $(\mu, \frac{\beta}{n})$ (EXP) است، به راحتی برای μ فاصله اطمینان $(1 - \alpha)\%$ می‌توان به صورت زیر به دست آورد: (برای اطلاع بیشتر به شینها (۱۹۸۶) مراجعه کنید.)

$$y_{(1)} - \frac{w_r}{n(n-1)} F_{(r, 2(n-1))} \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right), y_{(1)} - \frac{w_r}{n(n-1)} F_{(r, 2(n-1))} \left(\frac{\alpha}{r}\right)$$

که در آن $F_{(r, 2(n-1))}(\alpha/r)$ کران توزیع فیشر با درجات آزادی $(2, 2(n-1))$ و $(1 - \alpha)$ ضریب اطمینان است. چون توزیع مجانبی برآوردهای ماکسیم درست‌نمایی پارامترهای $(\hat{\theta}, \hat{\lambda})$ دارای توزیع نرمال دو متغیره $BND((\theta, \lambda), I^{-1}(\theta, \lambda))$ است. می‌توان فواصل اطمینان $(1 - \alpha)$ درصد برای پارامترهای λ و θ به صورت زیر به دست آورد.

$$C.I = \hat{\lambda} \pm Z_{\alpha} / \sqrt{var(\hat{\lambda})} \quad \text{و} \quad C.I = \hat{\theta} \pm Z_{\alpha} / \sqrt{var(\hat{\theta})}$$

که در آن Z_{α} چندک $\alpha\%$ بالایی توزیع نرمال استاندارد است. در بخش ۶ با استفاده از شبیه‌سازی مونت کارلو حدود اطمینان بالا و پایین با طول متوسط فاصله‌های اطمینان برای پارامترها با تولید نمونه‌های مختلف با احتمال پوششی فواصل بازه‌ای آورده شده است.

۳-۳- روش گشتاورها

در این بخش از برابری گشتاورهای جامعه و نمونه، پارامترها برآوردها می‌شود. برای این منظور فرض کنید:

$$s_y^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 \text{ و } \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \text{ و } d = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d_i$$

$$V(Y) = \left(\frac{\theta\lambda}{\lambda+\theta} \right)^2 \text{ و } E(Y) = \mu + \frac{\theta\lambda}{\lambda+\theta} \text{ و } E(D) = \frac{\lambda}{\lambda+\theta}$$

به ترتیب گشتاورهای نمونه و جامعه باشند. از برابری آنها می‌توان نوشت:

$$\bar{d} = \left(\frac{\lambda}{\lambda+\theta} \right)^2, \quad \bar{y} = \mu + \frac{\theta\lambda}{\lambda+\theta}, \quad s_y^2 = \left(\frac{\theta\lambda}{\lambda+\theta} \right)^2$$

از حل سه معادله، برآوردها عبارت‌اند از:

$$\hat{\mu} = \bar{y} - s_y, \quad \hat{\theta} = \frac{s_y}{\bar{d}}, \quad \hat{\lambda} = \frac{s_y}{1 - \bar{d}}$$

۳-۴- برآوردهای کمترین مربعات

اگر $y_{(1)}$ و $y_{(2)}$ و $\dots$ و $y_{(n)}$ آماره‌های مرتب از توزیع $EXP(\mu, \beta)$ باشند. آنگاه

$$F(y_{(i)}) = 1 - e^{-\beta(y_{(i)} - \mu)} \quad y_{(i)} > \mu \quad \theta, \lambda > 0 \quad \beta = \frac{1}{\theta} + \frac{1}{\lambda}$$

$$E(F(Y_{(i)})) = \frac{i}{n+1} \quad \text{و} \quad V(F(Y_{(i)})) = \frac{i(n-i+1)}{(n+1)^2(n+2)}$$

از مینیم کردن برآوردهای کمترین مربعات

$$Q_1 = \sum_{i=1}^n [F(Y_{(i)}) - E(F(Y_{(i)}))]^2 = \sum_{i=1}^n \left[1 - e^{-\beta(y_{(i)} - \mu)} - \frac{i}{n+1} \right]^2$$

نسبت به پارامترها μ و λ و θ ، آنها را برآورد کرد، همچنین از مینیم کردن کمترین مربعات وزنی

$$Q_2 = \sum_{i=1}^n w_i [F(Y_{(i)}) - E(F(Y_{(i)}))]^2$$

$$= \sum_{i=1}^n \frac{(n+1)^2(n+2)}{i(n-i+1)} \left[1 - e^{-\beta(y_{(i)} - \mu)} - \frac{i}{n+1} \right]^2$$

برای برآورد پارامترها با وزن $w_i = \frac{1}{V(F(Y_{(i)}))}$ استفاده کرد.

۳-۵-L-گشتاورها

یک روش براورد پارامترهای مجهول مبنی بر ترکیب خطی دیگر از آماره‌های معلوم براوردگرهای L-گشتاوری است که توسط هاسکین (۱۹۹۰) و بعداً توسط گوپتا و کوندو (۲۰۰۰) ارائه شد. در این حالت L-گشتاورهای نمونه جامعه به ترتیب برابرند با:

$$\begin{aligned} l_r &= \binom{n}{r}^{-1} \sum_{1 \leq i_1} \sum_{2 \leq i_2} \dots \sum_{i_r \leq n} r^{-1} \\ &= \sum_{k=0}^{r-1} \binom{-1}{k} \binom{r-1}{k} x_{i_{r-k};n} \quad ; \quad r = 1, 2, \dots, n \\ l_{1d} &= \bar{d} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d_{(i)} \\ l_{1y} &= \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_{(i)} \\ l_{2y} &= \frac{2}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (i-1)y_{(i)} - l_{1y}. \end{aligned}$$

و

$$\lambda_r = r^{-1} \sum_{k=0}^{r-1} \binom{-1}{k} \binom{r-1}{k} E(x_{i_{r-k};n}) \quad \text{و} \quad r = 1, 2, \dots, n$$

$$\lambda_{1d} = \frac{\lambda}{\lambda + \theta} \quad \text{و} \quad \lambda_{1y} = \mu + \frac{\theta \lambda}{\lambda + \theta} \quad \text{و} \quad l_{2y} = \frac{1}{2} \left(\frac{\theta \lambda}{\lambda + \theta} \right)$$

از برابری L-گشتاورهای می‌توان نوشت:

$$\bar{d} = \left(\frac{\lambda}{\lambda + \theta} \right), \quad \bar{y} = \mu + \frac{\theta \lambda}{\lambda + \theta}, \quad l_{2y} = \frac{1}{2} \left(\frac{\theta \lambda}{\lambda + \theta} \right)$$

از حل سه معادله، براوردگرهای L-گشتاوری پارامترها به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\hat{\mu} = \bar{y} - 2l_{2y}, \quad \hat{\theta} = \frac{2l_{2y}}{\bar{d}}, \quad \hat{\lambda} = \frac{2l_{2y}}{1 - \bar{d}}$$

۴- براورد بیزی

در این بخش با توسعه روش بیزی پارامترهای توزیع نمایی دو پارامتری با استفاده از داده‌های تصادفی سانسور شده، تحت تابع زیان آنتروپی تعمیم یافته (GELF) و

فاصله‌های اطمینان HPD برآورد می‌شوند. برای استفاده از روش بیزی فرض کنید پارامترهای λ و θ دارای توزیع‌های پیشین گاما معکوس با پارامترهای (a_2, b_2) و (a_1, b_1) به ترتیب دارای توابع چگالی

$$(8) \quad g_1(\lambda, a_1, b_1) \propto \frac{1}{\theta^{a_1+1}} \exp\left(\frac{-b_1}{\theta}\right); \quad \theta > 0, a_1, b_1 > 0$$

$$(9) \quad g_2(\lambda, a_2, b_2) \propto \frac{1}{\lambda^{a_2+1}} \exp\left(\frac{-b_2}{\lambda}\right) \quad \lambda > 0, a_2, b_2 > 0$$

باشند و توزیع پیشین یکنواخت ناسره برای به صورت زیر باشد.

$$(10) \quad g_3(\mu) \propto \frac{1}{c}; \quad -\infty < \mu < \infty, c > 0$$

علاوه بر در نظر گرفتن توزیع‌های پیشین برای پارامترها، فرض می‌شود که از هم مستقل هستند. که در این حالت توزیع پسین توأم را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$(11) \quad \Pi(\mu, \theta, \lambda, \tilde{y}, \tilde{d}) = \frac{l(\tilde{y}, \tilde{d} | \mu, \theta, \lambda) g_1(\theta, a_1, b_1) g_2(\lambda, a_2, b_2) g_3(\mu)}{\iiint l(\tilde{y}, \tilde{d} | \mu, \theta, \lambda) g_1(\theta, a_1, b_1) g_2(\lambda, a_2, b_2) g_3(\mu) d\mu d\theta d\lambda}$$

$$= \frac{\frac{1}{\theta^{a_1+w_1+1}} e^{\frac{-(b_1+\sum_{i=1}^n y_i - n\mu)}{\theta}} \frac{1}{\lambda^{a_2+n-w_1+1}} e^{\frac{-(b_2+\sum_{i=1}^n y_i - n\mu)}{\lambda}}}{\int_0^\infty \int_0^\infty \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\theta^{a_1+w_1+1}} e^{\frac{-(b_1+\sum_{i=1}^n y_i - n\mu)}{\theta}} \frac{1}{\lambda^{a_2+n-w_1+1}} e^{\frac{-(b_2+\sum_{i=1}^n y_i - n\mu)}{\lambda}} d\mu d\theta d\lambda}$$

از آنجا که نمی‌توان رابطه (۱۱) را به صورت یک فرم مشخص نوشت، می‌توان با استفاده از روش انتگرال‌گیری عددی پارامترها را با استفاده از روش بیزی تحت تابع زیان مناسب برآورد کرد. همچنین می‌توان با در نظر گرفتن فرایند نمونه‌گیری مهم برآوردهای سازگار بیزی و فواصل اطمینان HPD را به کمک شبیه‌سازی که توسط چن و شائو (۱۹۹۹) ارائه شده برآورد کرد. برای به کارگیری نمونه‌گیری گیبس، از تکنیک مشابهی که توسط دی و همکاران (۲۰۱۴) ارائه شده، استفاده خواهیم کرد. برای حالت خاص $b_2 = b_1 = b$ توزیع پسین را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\Pi(\mu, \theta, \lambda | \tilde{y}, \tilde{d}) \propto \frac{1}{\theta^{a_1+w_1+1}} e^{\frac{-(b+\sum_{i=1}^n y_i - n\mu)}{\theta}} \frac{1}{\lambda^{a_2+n-w_1+1}} e^{\frac{-(b+\sum_{i=1}^n y_i - n\mu)}{\lambda}}$$

که در این حالت توزیع پیشین توأم برابر است با:

$$(12) \quad \Pi(\mu, \theta, \lambda | \tilde{y}, \tilde{d}) = \frac{f_1(\theta | \mu, \tilde{y}, \tilde{d}) f_{\gamma}(\lambda | \mu, \tilde{y}, \tilde{d}) f_{\gamma}(\mu | \tilde{y}, \tilde{d})}{\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{y_{(1)}} f_1(\theta | \mu, \tilde{y}, \tilde{d}) f_{\gamma}(\lambda | \mu, \tilde{y}, \tilde{d}) f_{\gamma}(\mu | \tilde{y}, \tilde{d}) d\mu d\theta d\lambda}$$

به طوری که

$$(13) \quad f_1(\theta | \mu, \tilde{y}, \tilde{d}) = \frac{(b + \sum_{i=1}^n y_i - n\mu)^{a_1 + w_1}}{\Gamma(a_1 + w_1)} \frac{1}{\theta^{a_1 + w_1 + 1}} e^{-\frac{(b + \sum_{i=1}^n y_i - n\mu)}{\theta}} \quad \theta > 0$$

$$(14) \quad f_{\gamma}(\lambda | \mu, \tilde{y}, \tilde{d}) = \frac{(b + \sum_{i=1}^n y_i - n\mu)^{a_{\gamma} + n - w_1}}{\Gamma(a_{\gamma} + n - w_1)} \frac{1}{\lambda^{a_{\gamma} + n - w_1 + 1}} e^{-\frac{(b + \sum_{i=1}^n y_i - n\mu)}{\lambda}} \quad \lambda > 0$$

$$(15) \quad f_{\gamma}(\mu | \mu, \tilde{y}, \tilde{d}) = \frac{nk}{(b + \sum_{i=1}^n y_i - n\mu)^{a_1 + a_{\gamma} + n}} \quad -\infty < \mu < y_{(1)}$$

$$K = (a_1 + a_{\gamma} + n - 1) (b + \sum_{i=1}^n y_i - ny_{(1)})^{(a_1 + a_{\gamma} + n - 1)}$$

که در آن توابع $f_1(\theta | \mu, \tilde{y}, \tilde{d})$ و $f_{\gamma}(\lambda | \mu, \tilde{y}, \tilde{d})$ دارای توزیع گاما معکوس با پارامتر مقیاس مشترک $(b + \sum_{i=1}^n y_i - n\mu)$ و به ترتیب دارای پارامترها شکل مختلف $(a_1 + w_1)$ و $(a_{\gamma} + n - w_1)$ هستند. در حالی که تابع چگالی $f_{\gamma}(\mu | \tilde{y}, \tilde{d})$ یک توزیع پیشین با تابع توزیع زیر است:

$$F_{\gamma}(\mu) = \frac{(b + \sum_{i=1}^n y_i - ny_{(1)})^{a_1 + a_{\gamma} + n - 1}}{(b + \sum_{i=1}^n y_i - n\mu)^{a_1 + a_{\gamma} + n - 1}} \quad ; \quad \mu < y_{(1)}$$

که به راحتی می‌توان از تبدیل آن برای تولید نمونه استفاده کرد.

۱-۴- برآوردهای بیزی تحت تابع زیان GELF

تابع زیان آنتروپی تعمیم‌یافته (GELF) در سال ۱۹۹۶ توسط کالابریا و پول چنی به صورت زیر ارائه شد:

$$L(\theta, \theta^*) = \gamma \left[\left(\frac{\theta^*}{\theta} \right)^{\delta} - \delta \log \left(\frac{\theta^*}{\theta} \right) - 1 \right], \quad \gamma > 0, \quad \delta \neq 0$$

که در آن θ^* قاعده تصمیم برای برآورد θ و γ مقدار ثابت است، که در فرایند برآورد بیزی از تقسیم صورت بر مخرج حذف می‌شود. بنابراین بدون از دست دادن کلیت مسئله، می‌توان $\gamma=1$ در نظر گرفت. اما با توجه به رفتار δ می‌توان گفت که وقتی مقدار آن کمتر از صفر است، خطای منفی مؤثرتر از خطا مثبت است و برعکس وقتی که مقدار آن مثبت است. در برآورد بیزی مقدار θ^* طوری انتخاب می‌شود که تابع ریسک

$$r(\theta, \theta^*) = E(L(\theta, \theta^*) \mid \text{data})$$

مینیم شود و برای برآورد θ از تابع ریسک نسبت مشتق θ^* و برابر با صفر قرار می‌دهیم. که در این حالت برآوردگر بیزی و تابع ریسک به ترتیب برابرند با:

$$\begin{aligned}\theta^* &= \{E(\theta^{-\delta} \mid \text{data})\}^{-\frac{1}{\delta}} \\ \text{Risk} &= E(\log(\theta^\delta) \mid \text{data}) + \log \{E(\theta^{-\delta} \mid \text{data})\} \\ &= E(\log(\theta^\delta) \mid \text{data}) - \log(\theta^*)^\delta\end{aligned}$$

به طور مشابه، می‌توان برآوردهای بیزی را تحت تابع زیان GELF برای پارامترهای λ و μ به دست آورد.

۴-۲- نمونه‌گیری گیبس

حال در برآورد بیزی و فواصل اطمینان HPD پارامترهای θ ، λ و μ از نمونه‌گیری گیبس با گام‌های زیر استفاده می‌شود:

گام ۱: مقدار u_1 از توزیع یکنواخت $U(0, 1)$ تولید می‌شود.

گام ۲: با توجه به $f_3(\mu \mid \tilde{y}, \tilde{d})$ و تابع توزیع $F_3(\mu)$ با تبدیل انتگرال احتمال مقدار

$$\mu_1 = f_3^{-1}(u_1)$$

تولید می‌شود.

گام ۳: مقدار θ_1 از $f_1(\theta \mid \mu, \tilde{y}, \tilde{d})$ تولید می‌شود.

گام ۴: مقدار λ_1 از $f_2(\lambda \mid \mu, \tilde{y}, \tilde{d})$ تولید می‌شود.

گام ۵: برای به دست آوردن $(\mu_i, \theta_i, \lambda_i)$ برای $i = 1, 2, \dots, M$ گام‌های یک تا چهار $M - 1$ بار تکرار می‌شود.

گام ۶: برآورد بیزی پارامترها با استفاده از شبیه‌سازی شده تحت تابع زیان GELF به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\theta^* = \left[\frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \theta_j^{-\delta} \right]^{-\frac{1}{\delta}}$$

$$\lambda^* = \left[\frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \lambda_j^{-\delta} \right]^{-\frac{1}{\delta}}$$

$$\mu^* = \left[\frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \mu_j^{-\delta} \right]^{-\frac{1}{\delta}}$$

برآوردهای به دست آمده به ترتیب به حالت خاص برآوردهای بیزی تحت تابع زیان مربع خطا وقتی $\delta_1 = -1$ ، تحت تابع زیان آنتروپی وقتی $\delta = 1$ ، تحت تابع زیان پیشگیرانه وقتی $\delta_1 = -2$ ، تقلیل پیدا می‌کند. گاهی اوقات، هیچ اطلاعاتی در مورد پارامتر موجود نیست، که در چنین مواردی فرض می‌شود توزیع‌های پیشین توأم ناسره مستقل و متناسب با یک مقدار ثابت است. در حالی که توزیع پیشین فاقد اطلاع است، برآوردهای بیز θ ، λ و μ با در نظر گرفتن $a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = 0$ در توزیع پیشین گاما معکوس به دست می‌آید.

۴-۳- فواصل اطمینان HPD

فاصله اطمینان $(1 - \alpha)\%$ HPD با احتمال $(1 - \alpha)$ بوده و احتمال برای هر نقطه درون فاصله، باید بیشتر از هر نقطه‌ای خارج از فاصله باشد. بنابراین، فاصله اطمینان HPD کوتاهترین فاصله اطمینان میان همه‌ی فاصله‌های ممکن با احتمال یکسان $(1 - \alpha)$ هستند می‌باشد. با توجه به خواص اصلی فاصله اطمینان HPD، چن و شاو (۱۹۹۹) الگوریتم زیر را برای محاسبه فاصله اطمینان HPD، θ ارائه دادند.

۴-۴- الگوریتم Chen-Shao

(۱) به دست آوردن نمونه $(\theta_j, j=1,2,\dots,M)$ با استفاده از نمونه‌گیری MCMC از $f_1(\theta | \mu, \tilde{y}, \tilde{d})$.

(۲) مقادیر نمونه‌های $(\theta_j, j=1,2,\dots,M)$ را به صورت $\theta_{(1)} \leq \theta_{(2)} \leq \dots \leq \theta_{(m)}$ مرتب می‌شود.

(۳) فاصله اطمینان $(1-\alpha)\%$ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$(\theta_{(j)}, \theta_{(j+[(1-\alpha)M])} \text{ for } j = 1, 2, \dots, M - [(1-\alpha)M]$$

که در آن $[x]$ ، جزیی صحیح ایکس هست.

(۴) فاصله اطمینان $(1-\alpha)\%$ ، HPD کوچکترین فاصله اطمینان در میان تمام فواصل اطمینان در گام ۳ است. به طور مشابه می‌توانیم فواصل اطمینان HPD را برای پارامترهای λ و μ به دست آورید.

۵-برآورد پایایی و قابلیت اطمینان

در این بخش، توزیع نمایی دو پارامتر (θ, μ) را به عنوان یک مدل طول عمر در نظر می‌گیریم و اعتبار و ویژگی‌های آزمایشگاهی آن‌ها را با تخمین‌های آنها تحت سانسور تصادفی بررسی می‌کنیم. ویژگی‌ها عبارت‌اند از:

$$(۱) \text{ زمان متوسط شکست سیستم: } \text{MTSF} = E(X) = \mu + \theta$$

$$(۲) \text{ نرخ مخاطره: } h(s) = \frac{f(s)}{R(s)} = \frac{1}{\theta}, \mu < s < \infty, \text{ مدت مأموریت است.}$$

$$(۳) \text{ تابع قابلیت اطمینان } R(s) = e^{-(s-\mu)/\theta}$$

$$(۴) \text{ احتمال شکست } P = \lambda / (\lambda + \theta)$$

$$(۵) \text{ زمان انتظار آزمون}$$

در برنامه‌های عملی، یک آزمایش‌کننده ممکن است علاقه‌مند باشد که بداند آیا می‌توان تست را در یک دوره مشخص از زمان انجام داد. از آنجایی که هزینه آزمایش طول عمر به طور مستقیم به زمان اتمام آزمایش بستگی دارد، این اطلاعات برای یک آزمایشگر در انتخاب برنامه مناسب نمونه‌گیری و تصمیم‌گیری در مورد آن‌ها بسیار مهم

است. در مورد pdf از Y ، زمان شکست و یا سانسور در رابطه (۳) داده شده است، زمان آزمون $Y_{(n)} = \max(y_1, y_2, \dots, y_n)$ ، است. Cdf از $Y_{(n)}$ به صورت زیر است:

$$F_n(y) = p[Y_{(n)} \leq y] = [1 - e^{-(y-\mu)\beta}]^n; 0 \leq \mu \leq y \leq \infty$$

اکنون زمان انتظار آزمایش (ETT) برای داده‌های تصادفی سانسور شده:

$$ETT = E(Y_{(n)}) = \int_0^\infty (1 - F_n(y)) dy = \mu + \frac{c}{\beta} \quad c = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$$

توجه داشته باشید که $Y_{(n)}$ زمان مشاهده شده در آزمون (OBTT) را نشان می‌دهد و برآوردگر برای ETT است. همچنین زمان انتظار آزمایش برای داده‌های کامل:

$$ETT(\text{داده‌های کامل}) = E(X_{(n)}) = \int_0^\infty (1 - F_n(X)) dX = \mu + c\theta$$

با استفاده از ویژگی تغییرناپذیری MLE، برآورد ماکسیم درستنمایی از ویژگی‌های بالا به دست می‌آیند به طوری که:

$$(a) \quad \widehat{MTSF} = \hat{\mu} + \hat{\theta}$$

$$(b) \quad \hat{h}(s) = \frac{1}{\hat{\theta}}; 0 < \hat{\mu} \leq s < \infty$$

$$(c) \quad \hat{R}(s) = e^{\frac{-(s-\hat{\mu})}{\hat{\theta}}}; 0 < \hat{\mu} \leq s < \infty$$

$$(d) \quad \hat{p} = \frac{\hat{\lambda}}{\hat{\lambda} + \hat{\theta}}$$

$$(e) \quad \widehat{ETT} = \hat{\mu} + \frac{c}{\hat{\beta}}$$

همچنین برآوردهای بیزی با توجه به روابط بالا به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$(a) \quad MTSF^* = \left[\frac{1}{M} \sum_{j=1}^M (\mu_j + \theta_j)^{-\delta} \right]^{\frac{-1}{\delta}}$$

$$(b) \quad h^*(s) = \left[\frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \left(\frac{1}{\theta_j} \right)^{-\delta} \right]^{\frac{-1}{\delta}}$$

$$(c) \quad R^*(s) = \left[\frac{1}{M} \sum_{j=1}^M e^{\frac{\delta(s-\mu_j)}{\theta_j}} \right]^{\frac{-1}{\delta}}$$

۶- مطالعه شبیه‌سازی

در این بخش، یک مطالعه شبیه‌سازی مونت کارلو برای مقایسه کارایی برآوردهای مختلف تعمیم یافته در بخش‌های قبلی انجام شده است. برای مقایسه روش کلاسیک و بیزی، برآورد ماکسیم درستنمایی با فواصل اطمینان آنها و برآوردهای بیز تحت تابع زیان آنتروپی تعمیم یافته با فواصل اطمینان HPD برای نمونه‌های سانسور شده که به طور تصادفی تولید شده‌اند، برای مقادیر μ ، θ و λ به دست می‌آید. اکنون، مراحل گام به گام به شرح زیر انجام می‌شود:

(۱) مقادیر پارامترهای اضافی (a_1, b) ، (a_2, b) را از توزیع‌های اطلاع پیشین انتخاب می‌کنیم. برای پیشین فاقد اطلاع، ما $a_1 = a_2 = b = 0$ در نظر می‌گیریم.

(۲) مقادیر مختلف پارامترها را به وسیله توزیع‌های پیشین به طوری که $\theta = b/(a_1 - 1)$ و $\lambda = b/(a_2 - 1)$ باشد، به دست می‌آوریم.

(۳) مقدار واقعی از $\mu + \theta = \text{MTSF}$ و سایر مشخصات قابلیت اطمینان و آزمایش کاراکترها، با در نظر گرفتن مدت ماموریت $s = \mu + \frac{\text{MTSF}}{p}$ محاسبه می‌شوند.

(۴) با داشتن مقادیر مختلف پارامترها از توزیع $\text{Exp}(\mu, \beta)$ با pdf به فرم (۳) یک نمونه تصادفی $\tilde{y}$ با اندازه ثابت $N = 50$ تولید می‌کنیم. همچنین $\tilde{d}$ را به صورت (۴) تولید می‌کنیم.

(۵) برای مقادیر مختلف پارامترها و همچنین پارامترهای اضافی، برآورد حداکثر درستنمایی و فواصل اطمینان مجانبی را، با استفاده از روش گشتاوری، L-گشتاوری، حداقل مربعات و تخمین‌های بیزی از پارامترهای مجهول با فواصل معتبر مانند بخش‌های ۳ و ۴ برای مطالعه‌ی نسبی محاسبه می‌کنیم.

(۶) برآوردهای قابلیت اطمینان، زمان انتظار برای آزمون (ETT) و OBTT را برای هر نمونه به دست می‌آوریم.

(۷) مراحل ۴ و ۵ را، $N = 1000$ بار برای ترکیب‌های مختلف از مقادیر پارامتر، تکرار می‌کنیم. برای هر برآوردی که در مرحله ۵ و ۶ به دست آمد میانگین و میانگین مربع خطا (MSE) را محاسبه می‌کنیم.

تمام محاسبات با استفاده از نرم افزار R انجام می شود. برای مقایسه عملکرد برآوردهای بیزی و کلاسیک، ما از مقادیر پارامتری مختلف از جمله پارامتر مکان ۵ و ۲ و ۱ و $\mu = 0.5$ و همچنین مقادیر مختلف پارامترهای اضافی استفاده می کنیم. نتایج اصلی مطالعه شبیه سازی در جداول ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸ نشان داده شده است. از جداول، نتیجه می گیریم که:

- روش حداکثر درستنمایی، برای پارامترها، برآوردی تقریباً نااریب با MSE کاملاً کوچک ارائه می دهد.
- طول میانگین فاصله های اطمینان مجانبی بر اساس MLE به همان اندازه که مقادیر پارامتری اضافه می شود افزایش می یابد.
- احتمالات پوششی پارامترها، در مورد تقریباً تمام مقادیر پارامتری، که سطحشان اسمی است به دست می آید. بنابراین، نتایج مجانبی را می توان در تمام موقعیت های کاربردی استفاده کرد.
- برآوردها توسط روش گشتاوری، گشتاور- L ، حداقل مربعات و حداقل مربعات وزنی به آسانی محاسبه می شوند اما نتایج بسیار خوبی دارند.
- برآورد بیز نیز در رابطه با MSE بسیار خوب است و چندین بار بهتر از MLE است. این بدین دلیل است که در برآورد Bayes از اطلاعات پیشین اضافی استفاده می شود.
- از جداول ۴ و ۵ و ۶ نتیجه می شود که MSE برآوردهای θ ، λ در مواردی که $a_1, a_2 < 2$ و واریانس توزیع پیشین وجود ندارد، بزرگتر هستند. بنابراین، باید از مقادیر پارامتر اضافی با اندازه کمتر از ۲ اجتناب کنید.
- از جدول ۲، مشاهده می کنیم که MLE از ETT و برآورد OBTT جامعه از ETT کاملاً نزدیک با اریبی بسیار کمی است. اما، MSE، از $\hat{ETT}$ برآورد حداکثر درستنمایی بسیار کمتر از OBTT برای مقادیر مختلف پارامترها است. بنابراین ما توصیه می کنیم از MLE برای ETT به جای OBTT برای برآورد ETT استفاده کنید.

جدول ۶- MLE ها برای پارامترها و ویژگی‌های قابلیت اطمینان

پارامترها	θ		$\hat{\lambda}$		μ		مقدار درست				$MLSF$		R		
	θ	λ	μ	θ		$\hat{\lambda}$		μ		H	R	$MLSF$		R	
				AV	MSE	AV	MSE	AV	MSE			AV	MSE	AV	MSE
۱	۱	۱	۰.۵	۱.۰۰۴۶	۰.۰۰۴۵۶	۱.۰۰۱۲	۰.۰۰۳۷۲	۰.۵۱۰۲	۰.۰۰۰۰۲	۱.۵۰۰	۰.۰۰۰۰۰	۰.۰۰۰۰۰	۱.۵۱۱۶	۰.۰۰۴۹۳	۰.۰۰۴۸
	۱	۱	۱	۱.۰۱۷۹	۰.۰۰۳۸۴	۰.۹۸۹۵	۰.۰۰۵۱۵	۱.۰۱۰۵	۰.۰۰۰۰۲	۲.۰۰۰	۰.۰۰۰۰۰	۰.۰۰۰۰۰	۲.۰۱۱۴	۰.۰۰۴۴۶	۰.۰۰۴۵
	۱	۱	۲	۰.۹۹۹۳	۰.۰۰۳۵۶	۱.۰۰۱۳	۰.۰۰۳۳۷	۱.۰۱۰۱	۰.۰۰۰۰۲	۲.۰۰۰	۰.۰۰۰۰۰	۰.۰۰۰۰۰	۲.۰۱۲۹	۰.۰۰۴۲۶	۰.۰۰۴۶
۲	۱	۲	۰.۵	۰.۹۸۳۷	۰.۰۰۳۱۳	۱.۰۰۴۴۹	۰.۰۱۱۵۸	۰.۰۰۰۰۴	۵.۰۰۰	۰.۰۰۰۰۰	۰.۰۰۰۰۰	۵.۹۹۴۴	۰.۰۰۳۳۵	۰.۰۰۴۷	۰.۰۰۵۷
	۲	۳	۰.۵	۱.۹۸۱۳	۰.۰۱۳۱۳	۳.۰۰۳۵۸	۰.۰۵۰۸۴	۰.۰۰۰۱۲	۲.۵۰۰	۰.۰۰۰۰۰	۰.۰۰۰۰۰	۲.۵۰۲۱	۰.۰۱۳۳۷	۰.۰۰۴۷	۰.۰۰۶۷
	۲	۳	۱	۱.۹۹۱۴	۰.۰۱۳۰۴	۳.۰۰۲۵۷	۰.۰۵۰۰۵	۰.۵۱۲۳	۰.۰۰۰۱۲	۳.۰۰۰	۰.۰۰۰۰۰	۰.۰۰۰۰۰	۲.۹۸۸۹	۰.۰۱۲۵۰	۰.۰۰۶۴
۳	۲	۳	۲	۳.۰۵۱۱	۰.۰۸۶۸	۱.۹۸۵۴	۰.۱۳۳۶	۲.۰۲۲۶	۰.۰۰۰۱۱	۵.۰۰۰	۰.۰۰۰۰۰	۰.۰۰۰۰۰	۵.۰۳۳۳	۰.۰۵۰۶۸	۰.۰۰۶۳
	۳	۲	۵	۵.۱۷۷۷	۱.۵۷۵۶	۲.۹۵۹۹	۰.۰۸۰۶	۵.۰۳۹۲	۰.۰۰۰۲۷	۱۰.۰۰۰	۰.۰۰۰۰۰	۰.۰۰۰۰۰	۱۰.۱۳۰۴	۱.۵۰۰۰۹	۰.۰۰۷۳
	۳	۷	۷	۵.۹۲۴۹	۱.۶۸۸۹	۷.۰۲۰۹	۲.۳۱۵۳	۷.۰۶۳۲	۰.۰۰۰۹۱	۱۳.۰۰۰	۰.۰۱۶۶۷	۰.۰۳۳۸۵	۱۳.۱۳۶۲	۱.۷۰۰۹۸	۰.۰۰۸۳
۴	۱	۱	۹	۱.۰۱۲۱	۰.۰۰۲۵۷	۱.۰۰۰۲	۰.۰۰۳۴	۹.۰۱۰۴	۰.۰۰۰۰۲	۱۰.۰۰۰	۰.۰۰۰۰۰	۰.۰۰۰۰۰	۱۰.۰۰۰۸	۰.۰۰۲۲۲	۰.۰۰۰۱

جدول ۷- برآورد ETT

θ	λ	M	ETT برای داده‌های کامل		ETT برای داده‌های سانسور شده تصادفی		MSE	
			AV	MSE	OBTT	ETT	OBTT	ETT
۱	۱	۰.۵	۲.۹۹۹۲	۰.۰۰۰۰۲	۲.۹۹۹۶	۲.۹۹۹۶	۲.۹۹۹۶	۰.۰۱۰۶۰
۱	۱	۱	۵.۹۹۹۲	۰.۰۰۰۰۲	۳.۹۹۹۶	۳.۹۹۹۶	۳.۹۹۹۶	۰.۰۱۰۶۸
۱	۱	۲	۶.۹۹۹۲	۰.۰۰۰۰۲	۴.۹۹۹۶	۴.۹۹۹۶	۴.۹۹۹۶	۰.۰۱۲۰۹
۱	۲	۰.۵	۹.۹۹۹۲	۰.۰۰۰۰۲	۷.۹۹۹۵	۷.۹۹۹۵	۷.۹۹۹۵	۰.۰۲۶۵۱
۲	۳	۰.۵	۹.۹۹۸۴	۰.۰۰۰۰۲	۵.۹۹۹۰	۵.۹۹۸۷	۵.۹۹۸۷	۰.۰۹۹۳۱
۲	۳	۱	۹.۹۹۸۴	۰.۰۰۰۰۲	۶.۹۹۹۰	۶.۹۹۸۴	۶.۹۹۸۴	۰.۰۶۰۹۱
۳	۲	۲	۱۵.۹۹۷۶	۰.۰۰۰۰۲	۷.۹۹۹۰	۷.۹۹۹۰	۷.۹۹۹۰	۰.۰۶۱۶۷
۵	۳	۵	۲۷.۹۹۶۰	۰.۰۰۰۰۲	۱۳.۹۹۹۰	۱۳.۹۹۹۰	۱۳.۹۹۹۰	۱.۳۶۴۱
۶	۷	۷	۳۳.۹۹۵۲	۰.۰۰۰۰۲	۲۱.۹۹۹۰	۲۱.۹۹۹۰	۲۱.۹۹۹۰	۲.۱۲۰۸

جدول ۳- برآورد پارامترها به روش کلاسیک

θ	λ	θ		$\hat{\lambda}$		μ		β		$\hat{\lambda}$		μ	
		AV	MSE	AV	MSE	AV	MSE	AV	MSE	AV	MSE	AV	MSE
۱	۱	۱/۰۸۳۵	۰/۰۰۰۰	۱/۰۵۲۸	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۱/۰۳۸۸	۰/۰۰۰۰	۱/۰۳۵۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰
۱	۱	۱/۰۹۲۹	۰/۰۰۰۰	۱/۰۳۵۸	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۱/۰۳۶۰	۰/۰۰۰۰	۱/۰۳۶۲	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰
۱	۱	۱/۰۸۸۴	۰/۰۰۰۰	۱/۰۳۳۸	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۱/۰۳۳۲	۰/۰۰۰۰	۱/۰۳۷۲	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰
۱	۱	۱/۱۱۰۹	۰/۰۰۰۰	۱/۰۷۹۲	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۱/۰۳۹۳	۰/۰۰۰۰	۱/۰۳۹۷	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰
۲	۳	۲/۲۱۰۸	۰/۰۰۰۰	۲/۱۱۲۸	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۲/۰۶۷۱	۰/۰۰۰۰	۲/۰۸۷۳	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰
۲	۳	۲/۱۷۲۱	۰/۰۰۰۰	۲/۱۳۷۱	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۲/۰۳۳۸	۰/۰۰۰۰	۲/۱۱۳۹	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰
۳	۲	۳/۱۶۴۰	۰/۰۰۰۰	۳/۱۰۳۳	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۳/۰۳۷۲	۰/۰۰۰۰	۳/۰۵۱۵	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰
۵	۳	۵/۲۷۴۰	۰/۰۰۰۰	۵/۱۲۱۱	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۵/۱۰۸۱	۰/۰۰۰۰	۵/۰۸۱۳	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰
۶	۷	۶/۵۰۶۰	۰/۰۰۰۰	۶/۲۴۸۳	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۶/۱۴۱۶	۰/۰۰۰۰	۶/۱۵۵۷	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰
۱	۱	۱/۰۶۹۷	۰/۰۰۰۰	۱/۰۴۱۹	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۱/۰۱۲۶	۰/۰۰۰۰	۱/۰۳۳۷	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰
برآورد													
۱	۱	۰/۰۹۹۶	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۳۳	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۱۱	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۳۹	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۵۱	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۱۳	۰/۰۰۰۰
۱	۱	۱/۰۰۸۸	۰/۰۰۰۰	۱/۰۰۹۲	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۱/۰۰۳۰	۰/۰۰۰۰	۱/۰۰۴۶	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۸۸	۰/۰۰۰۰
۱	۱	۱/۰۰۵۸	۰/۰۰۰۰	۱/۰۰۱۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۱/۰۰۳۴	۰/۰۰۰۰	۱/۰۰۲۸	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰
۱	۲	۰/۰۹۷۳	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۳۷	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۱۳	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۳۲	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۸۹	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۳۸	۰/۰۰۰۰
۲	۳	۱/۰۸۶۳	۰/۰۰۰۰	۱/۰۱۹۵	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۳۴	۰/۰۰۰۰	۱/۰۳۰۸	۰/۰۰۰۰	۱/۰۳۷۷	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۳۱	۰/۰۰۰۰
۲	۳	۱/۰۷۵۷	۰/۰۰۰۰	۱/۰۱۳۷	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۲۵	۰/۰۰۰۰	۱/۰۳۳۵	۰/۰۰۰۰	۱/۰۳۱۴	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۵۸	۰/۰۰۰۰
۳	۲	۳/۰۲۶۶	۰/۰۰۰۰	۳/۰۲۲۷	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۲۲	۰/۰۰۰۰	۳/۰۲۲۴	۰/۰۰۰۰	۳/۰۲۶۱	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۳۴	۰/۰۰۰۰
۵	۳	۵/۰۱۵۴	۰/۰۰۰۰	۵/۰۶۸۸	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۳۳	۰/۰۰۰۰	۵/۰۰۹۵	۰/۰۰۰۰	۵/۰۲۴۹	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۵۰	۰/۰۰۰۰
۶	۷	۵/۰۶۱۵	۰/۰۰۰۰	۵/۰۸۰۷	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۳۳	۰/۰۰۰۰	۵/۰۰۵۰	۰/۰۰۰۰	۵/۰۰۲۸	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۲۹	۰/۰۰۰۰
۱	۱	۱/۰۰۰۵	۰/۰۰۰۰	۱/۰۰۶۱	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۱۸	۰/۰۰۰۰	۱/۰۰۳۱	۰/۰۰۰۰	۱/۰۰۱۶	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۵۵	۰/۰۰۰۰
گسترده													
۱	۱	۰/۰۹۹۶	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۳۳	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۱۱	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۳۹	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۵۱	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۱۳	۰/۰۰۰۰
۱	۱	۱/۰۰۸۸	۰/۰۰۰۰	۱/۰۰۹۲	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۱/۰۰۳۰	۰/۰۰۰۰	۱/۰۰۴۶	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۸۸	۰/۰۰۰۰
۱	۱	۱/۰۰۵۸	۰/۰۰۰۰	۱/۰۰۱۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۱/۰۰۳۴	۰/۰۰۰۰	۱/۰۰۲۸	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰
۱	۲	۰/۰۹۷۳	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۳۷	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۱۳	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۳۲	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۸۹	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۳۸	۰/۰۰۰۰
۲	۳	۱/۰۸۶۳	۰/۰۰۰۰	۱/۰۱۹۵	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۳۴	۰/۰۰۰۰	۱/۰۳۰۸	۰/۰۰۰۰	۱/۰۳۷۷	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۳۱	۰/۰۰۰۰
۲	۳	۱/۰۷۵۷	۰/۰۰۰۰	۱/۰۱۳۷	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۲۵	۰/۰۰۰۰	۱/۰۳۳۵	۰/۰۰۰۰	۱/۰۳۱۴	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۵۸	۰/۰۰۰۰
۳	۲	۳/۰۲۶۶	۰/۰۰۰۰	۳/۰۲۲۷	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۲۲	۰/۰۰۰۰	۳/۰۲۲۴	۰/۰۰۰۰	۳/۰۲۶۱	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۳۴	۰/۰۰۰۰
۵	۳	۵/۰۱۵۴	۰/۰۰۰۰	۵/۰۶۸۸	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۳۳	۰/۰۰۰۰	۵/۰۰۹۵	۰/۰۰۰۰	۵/۰۲۴۹	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۵۰	۰/۰۰۰۰
۶	۷	۵/۰۶۱۵	۰/۰۰۰۰	۵/۰۸۰۷	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۳۳	۰/۰۰۰۰	۵/۰۰۵۰	۰/۰۰۰۰	۵/۰۰۲۸	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۲۹	۰/۰۰۰۰
۱	۱	۱/۰۰۰۵	۰/۰۰۰۰	۱/۰۰۶۱	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۱۸	۰/۰۰۰۰	۱/۰۰۳۱	۰/۰۰۰۰	۱/۰۰۱۶	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۵۵	۰/۰۰۰۰

جدول ۴- برآورد بیزی پارامترها تحت اطلاعات پیشین SELF

پارامترها	Θ	۱	۱	۱	۲	۲	۳	۳	۵	۵	۵	۱
λ	λ	۱	۱	۱	۲	۲	۳	۳	۳	۳	۳	۱
μ	μ	۰.۵	۱	۲	۵	۵	۱	۲	۵	۵	۵	۹
b	b	۲	۲	۲	۲	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۵
a_1	a_1	۳	۳	۳	۳	۱.۵	۱.۵	۱.۵	۱.۵	۱.۵	۱.۵	۶
a_2	a_2	۳	۳	۳	۲	۱.۳۳۳۳	۱.۳۳۳۳	۱.۵	۱.۳۳۳۳	۱.۳۳۳۳	۱.۳۳۳۳	۶
θ^*	AV	۱.۴۰۸۱	۱.۴۰۱۵۷	۱.۴۰۱۱۴	۱.۴۰۹۰۶	۱.۴۰۴۱۵	۱.۴۰۳۳۵	۱.۴۰۳۶۱	۱.۴۰۳۶۱	۱.۴۰۳۶۱	۱.۴۰۳۶۱	۱.۴۰۳۶۱
	MSE	۰.۳۸۷	۰.۳۹۲	۰.۳۹۱	۰.۳۷۹	۰.۳۷۸	۰.۳۷۹	۰.۳۷۹	۰.۳۷۹	۰.۳۷۹	۰.۳۷۹	۰.۳۷۹
λ^*	AV	۱.۴۰۱۹۴	۱.۴۰۳۰۲	۱.۴۰۱۲۷	۱.۴۰۶۹۷	۱.۴۰۰۰۸	۱.۴۰۱۱۱	۱.۴۰۳۰۱	۱.۴۰۳۰۱	۱.۴۰۳۰۱	۱.۴۰۳۰۱	۱.۴۰۳۰۱
	MSE	۰.۳۷۹	۰.۳۷۹	۰.۳۷۵	۰.۳۶۸	۰.۳۶۵	۰.۳۶۵	۰.۳۶۵	۰.۳۶۵	۰.۳۶۵	۰.۳۶۵	۰.۳۶۵
μ^*	AV	۰.۵۰۰۴	۱.۴۰۰۰۲	۱.۴۰۰۰۰	۱.۴۰۰۰۰	۰.۵۰۰۰۶	۱.۴۰۰۰۷	۱.۴۰۰۰۶	۱.۴۰۰۰۶	۱.۴۰۰۰۶	۱.۴۰۰۰۶	۱.۴۰۰۰۶
	MSE	۰.۴۰۰۰۱	۰.۴۰۰۰۱	۰.۴۰۰۰۱	۰.۴۰۰۰۲	۰.۴۰۰۰۲	۰.۴۰۰۰۲	۰.۴۰۰۰۲	۰.۴۰۰۰۲	۰.۴۰۰۰۲	۰.۴۰۰۰۲	۰.۴۰۰۰۲
$MTSP^*$	AV	۱.۵۰۰۸۶	۱.۴۰۱۵۹	۱.۴۰۱۱۳	۱.۴۰۹۰۴	۱.۴۰۴۴۰	۱.۴۰۳۵۱	۱.۴۰۳۷۷	۱.۴۰۳۷۷	۱.۴۰۳۷۷	۱.۴۰۳۷۷	۱.۴۰۳۷۷
	MSE	۰.۳۸۷	۰.۳۹۰	۰.۳۸۹	۰.۳۷۵	۰.۳۷۸	۰.۳۷۹	۰.۳۷۹	۰.۳۷۹	۰.۳۷۹	۰.۳۷۹	۰.۳۷۹
$h^*(S)$	AV	۱.۴۰۶۶۱	۱.۴۰۵۸۸	۱.۴۰۵۲۳	۱.۴۰۴۶۴	۱.۴۰۳۷۸	۱.۴۰۳۷۸	۱.۴۰۳۷۸	۱.۴۰۳۷۸	۱.۴۰۳۷۸	۱.۴۰۳۷۸	۱.۴۰۳۷۸
	MSE	۰.۳۸۷	۰.۳۸۸	۰.۳۸۸	۰.۳۸۴	۰.۳۸۴	۰.۳۸۴	۰.۳۸۴	۰.۳۸۴	۰.۳۸۴	۰.۳۸۴	۰.۳۸۴
$R^*(S)$	AV	۰.۴۰۶۰۹	۰.۴۰۶۲۲	۰.۴۰۶۲۲	۰.۴۰۶۲۲	۰.۴۰۶۲۲	۰.۴۰۶۲۲	۰.۴۰۶۲۲	۰.۴۰۶۲۲	۰.۴۰۶۲۲	۰.۴۰۶۲۲	۰.۴۰۶۲۲
	MSE	۰.۴۰۴۳	۰.۴۰۴۵	۰.۴۰۴۳	۰.۴۰۴۰۷	۰.۴۰۴۰۷	۰.۴۰۴۰۷	۰.۴۰۴۰۷	۰.۴۰۴۰۷	۰.۴۰۴۰۷	۰.۴۰۴۰۷	۰.۴۰۴۰۷

جدول ۵- برآورد بیز پارامترها تحت اطلاعات پیشین ELP

پارامترها	Θ	۱	۱	۱	۱	۲	۲	۲	۳	۳	۵	۶	۱
λ	λ	۱	۱	۱	۲	۳	۳	۳	۲	۲	۳	۷	۱
μ	μ	۰/۵	۱	۲	۵	۰/۵	۱	۱	۲	۲	۵	۷	۹
b	b	۲	۲	۲	۲	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۵	۵
a_1	a_1	۳	۳	۳	۳	۱/۵	۱/۵	۱/۵	۱/۳۳۳۳	۱/۳۳۳۳	۱/۲	۱/۳۳۳۳	۶
a_2	a_2	۳	۳	۳	۲	۱/۳۳۳۳	۱/۳۳۳۳	۱/۳۳۳۳	۱/۳۳۳۳	۱/۳۳۳۳	۱/۳۳۳۳	۱/۳۳۳۳	۶
θ^*	AV	۰/۹۷۲۴	۰/۹۸۱۹	۰/۹۷۷۵	۰/۹۸۲۴	۱/۹۷۶۶	۱/۹۶۱۲	۲/۹۲۹۴	۱/۵	۲/۹۲۹۴	۳/۸۹۱۰	۵/۸۸۷۱	۰/۹۷۷۱
	MSE	۰/۳۱۶	۰/۳۲۴	۰/۳۵۹	۰/۳۵۵	۰/۱۳۴۰	۰/۱۳۳۷	۰/۲۵۲۲	۱/۳۳۳۴	۱/۳۳۳۴	۱/۳۳۳۴	۱/۳۳۳۷	۰/۲۹۰
λ^*	AV	۰/۸۸۵۵	۰/۹۷۲۱	۰/۹۸۰۰	۱/۹۴۶۱	۲/۹۵۸۷	۲/۹۱۵۱	۱/۹۴۳۳	۲/۹۵۹۰	۲/۹۵۹۰	۲/۹۵۹۰	۶/۸۹۸۳	۰/۸۸۱۲
	MSE	۰/۳۲۱	۰/۳۲۶۵	۰/۳۲۸۳	۰/۳۰۹۸	۰/۳۷۶۷	۰/۳۵۵۵	۰/۱۲۳۹	۰/۲۹۸۱	۰/۲۹۸۱	۰/۲۹۸۱	۲/۰۷۰۱	۰/۲۸۱۲
μ^*	AV	۰/۴۹۹۸	۱/۰۰۰۱	۲/۰۰۰۵	۲/۹۹۹۷	۰/۳۹۸۷	۱/۰۰۰۰	۲/۰۰۱۱	۳/۹۹۸۵	۳/۹۹۸۵	۳/۹۹۸۵	۶/۹۹۸۳	۹/۰۰۰۳
	MSE	۰/۰۰۰۱	۰/۰۰۰۱	۰/۰۰۰۱	۰/۰۰۰۲	۰/۰۰۰۶	۰/۰۰۰۶	۰/۰۰۰۷	۰/۰۰۱۳	۰/۰۰۱۳	۰/۰۰۱۳	۰/۰۰۳۷	۰/۰۰۰۱
$MTSF^*$	AV	۱/۸۸۴۶	۲/۰۰۰۵	۳/۰۰۲۲	۶/۰۰۵۷	۲/۸۹۸۸	۲/۸۸۳۷	۴/۸۸۸۲	۱/۰۰۱۸۰	۱/۰۰۱۸۰	۱/۰۰۱۸۰	۱۳/۰۰۰۴	۱/۰۰۰۷۴
	MSE	۰/۳۱۶	۰/۳۲۳۳	۰/۳۳۷۵	۰/۳۶۴	۰/۱۳۳۳	۰/۱۲۲۷	۰/۳۶۳۹	۱/۳۹۸۱	۱/۳۹۸۱	۱/۳۹۸۱	۱/۳۷۵۷	۰/۳۰۷
$k^*(S)$	AV	۱/۰۲۳۹	۱/۰۱۲۶	۱/۰۲۲۶	۱/۰۱۵۳	۰/۵۰۶۷	۰/۵۰۹۴	۰/۳۴۱۴	۰/۲۰۴۶	۰/۲۰۴۶	۰/۲۰۴۶	۰/۱۷۰۰	۱/۰۱۹۶
	MSE	۰/۳۶۱	۰/۳۲۲	۰/۳۳۹۱	۰/۳۲۷۳	۰/۰۰۹۲	۰/۰۰۸۹	۰/۰۰۵۹	۰/۰۰۵۳	۰/۰۰۵۳	۰/۰۰۵۳	۰/۰۰۱۱	۰/۰۳۲۰
$R^*(S)$	AV	۰/۴۵۳۴	۰/۳۴۶۶	۰/۴۰۵۵	۰/۴۰۳۱	۰/۵۱۱۷	۰/۴۵۶۵	۰/۴۰۹۸	۰/۳۳۹۶	۰/۳۳۹۶	۰/۳۳۹۶	۰/۳۱۹۸	۰/۳۰۵۲
	MSE	۰/۰۰۴۶	۰/۰۰۴۶	۰/۰۰۳۹	۰/۰۰۰۵	۰/۰۰۳۳	۰/۰۰۳۴	۰/۰۰۶۹	۰/۰۰۶۹	۰/۰۰۶۹	۰/۰۰۶۹	۰/۰۰۵۰	۰/۰۰۰۰

جدول ۶- برآورد بیز پارامترها تحت اطلاعات پیشین PLF

	Θ	۱	۱	۱	۱	۲	۲	۲	۳	۳	۴	۵	۶	۷
پارامترها	λ	۱	۱	۱	۱	۲	۳	۳	۲	۲	۲	۳	۶	۷
	μ	۰/۵	۱	۲	۵	۰/۵	۱	۱	۲	۲	۲	۵	۷	۹
پارامترهای اضافه	b	۲	۲	۲	۲	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۵	۵
	a_1	۳	۳	۳	۳	۱/۵	۱/۵	۱/۵	۱/۳۳۳۳	۱/۳۳۳۳	۱/۳۳۳۳	۱/۲	۱/۳۳۳۳	۶
	a_2	۳	۳	۳	۳	۱/۳۳۳۳	۱/۳۳۳۳	۱/۳۳۳۳	۱/۵	۱/۵	۱/۳۳۳۳	۱/۳۳۳۳	۱/۷۱۲۳	۶
θ^*	AV	۱/۴۵۴	۱/۴۵۵	۱/۳۷۲	۱/۴۷۴	۲/۴۵۶	۲/۴۶۱	۲/۴۹۳	۳/۴۹۳	۵/۴۱۰۳	۵/۴۱۰۳	۵/۴۱۰۳	۶/۴۱۰۳	۱/۴۱۹۵
	MSE	۰/۴۰۸	۰/۴۴۹	۰/۴۴۰	۰/۴۰۲	۰/۴۵۰	۰/۴۵۵	۰/۴۹۳	۰/۴۷۵	۱/۴۵۲	۱/۴۵۲	۱/۴۵۲	۱/۴۵۲	۰/۴۱۰
λ^*	AV	۱/۴۴۳	۱/۴۴۴	۱/۴۱۶	۱/۴۴۲	۳/۴۹۳	۳/۴۰۹	۳/۴۰۹	۲/۴۶۲	۳/۴۰۴	۳/۴۰۴	۳/۴۰۴	۷/۴۲۵	۱/۴۴۱
	MSE	۰/۴۳۷	۰/۴۱۱	۰/۴۰۹	۰/۴۰۲	۰/۴۸۴	۰/۴۳۱	۰/۴۳۱	۰/۴۳۴	۰/۴۳۵	۰/۴۳۵	۰/۴۳۵	۲/۴۵۹	۰/۴۳۰
μ^*	AV	۰/۵۰۹	۰/۹۹۸	۲/۴۰۰	۲/۹۹۷	۰/۵۱۵	۱/۴۰۱	۱/۴۰۱	۲/۴۰۴	۵/۴۰۰	۵/۴۰۰	۵/۴۰۰	۶/۴۹۹	۹/۴۰۰
	MSE	۰/۴۰۱	۰/۴۰۱	۰/۴۰۱	۰/۴۰۲	۰/۴۰۶	۰/۴۰۶	۰/۴۰۶	۰/۴۰۵	۰/۴۰۳	۰/۴۰۳	۰/۴۰۳	۰/۴۰۴	۰/۴۰۱
$MTSF^*$	AV	۱/۴۳۶	۲/۴۲۵	۳/۴۴۰	۶/۴۱۷	۲/۴۵۰	۳/۴۰۵	۳/۴۰۵	۵/۴۱۷	۱۰/۴۳۸	۱۰/۴۳۸	۱۰/۴۳۸	۱۲/۴۷۱	۱/۴۴۱
	MSE	۰/۴۳۷	۰/۴۲۹	۰/۴۰۸	۰/۴۱۴	۰/۴۷۰	۰/۴۲۲	۰/۴۲۲	۰/۴۳۰	۱/۴۲۶	۱/۴۲۶	۱/۴۲۶	۱/۴۵۲	۰/۴۲۹
$h^*(S)$	AV	۱/۴۵۱	۱/۴۸۰	۱/۴۶۵	۱/۴۵۲	۰/۴۶۲	۰/۴۳۸	۰/۴۳۸	۰/۴۶۹	۰/۴۲۱	۰/۴۲۱	۰/۴۲۱	۰/۴۷۵	۱/۴۶۴
	MSE	۰/۴۳۹	۰/۴۴۹	۰/۴۴۱	۰/۴۳۵	۰/۴۰۳	۰/۴۱۰	۰/۴۱۰	۰/۴۰۷	۰/۴۰۹	۰/۴۰۹	۰/۴۰۹	۰/۴۱۳	۰/۴۳۲
$R^*(S)$	AV	۰/۴۴۵	۰/۴۸۳	۰/۴۴۹	۰/۴۴۰	۰/۴۷۰	۰/۴۶۵	۰/۴۶۵	۰/۴۶۹	۰/۴۷۰	۰/۴۷۰	۰/۴۷۰	۰/۴۸۱	۰/۴۳۶
	MSE	۰/۴۴۱	۰/۴۴۳	۰/۴۳۷	۰/۴۴۰	۰/۴۴۴	۰/۴۴۰	۰/۴۴۰	۰/۴۴۰	۰/۴۴۰	۰/۴۴۰	۰/۴۴۰	۰/۴۴۲	۰/۴۴۰

جدول ۷- برآورد بین پارامترها فاقد اطلاعات پیشین SELF

[illegible]

جدول ۸- فاصله اطمینان و فاصله معتبر HPD برای پارامترها

پارامترها	θ										
		۱	۱	۱	۲	۲	۳	۳	۴	۵	۶
پارامترهای اضافی	λ	۱	۱	۱	۲	۳	۳	۲	۲	۳	۷
	μ	۰.۵	۱	۲	۰.۵	۱	۲	۲	۲	۵	۷
	b	۲	۲	۲	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۵
	a_1	۳	۳	۳	۱.۵	۱.۵	۱.۵	۱.۵	۱.۵	۱.۵	۱.۵
	a_2	۳	۳	۳	۱.۳۳۳۳	۱.۳۳۳۳	۱.۳۳۳۳	۱.۵	۱.۵	۱.۳۳۳۳	۱.۳۳۳۳
فاصله اطمینان	θ	AL ۰.۸۱۳۳ ۰.۸۱۳۳	۰.۸۲۱۱ ۰.۸۱۸	۰.۸۱۳۹ ۰.۸۱۲۷	۰.۸۶۷ ۰.۸۳۶	۱.۳۶۲۷ ۰.۹۱۸	۱.۳۶۲۷ ۰.۹۱۸	۲.۸۱۶۱ ۰.۹۴	۲.۸۱۶۱ ۰.۹۴	۲.۸۳۰۵ ۰.۹۳۶	۲.۸۶۲ ۰.۹۳۹
	λ	AL ۰.۸۰۳۳ ۰.۸۱۳۳	۰.۸۰۷۳ ۰.۸۳۱	۰.۸۲۰۱ ۰.۸۱۳	۲.۸۶۲۷ ۰.۸۳۷	۲.۸۶۲۷ ۰.۸۳۷	۲.۸۶۲۷ ۰.۸۳۷	۱.۳۶۲۷ ۰.۹۱۸	۱.۳۶۲۷ ۰.۹۱۸	۲.۸۱۶۱ ۰.۹۳۶	۲.۸۶۲ ۰.۹۳۹
	μ	AL ۰.۸۲۸ ۰.۸۲۸	۰.۸۳۷ ۰.۸۳۷	۰.۸۳۸ ۰.۸۳۸	۰.۸۳۷ ۰.۸۳۷	۰.۸۳۷ ۰.۸۳۷	۰.۸۳۷ ۰.۸۳۷	۰.۸۳۷ ۰.۸۳۷	۰.۸۳۷ ۰.۸۳۷	۰.۸۳۷ ۰.۸۳۷	۰.۸۳۷ ۰.۸۳۷
	θ	AL ۰.۸۲۸ ۰.۸۲۸	۰.۸۳۷ ۰.۸۳۷	۰.۸۳۸ ۰.۸۳۸	۰.۸۳۷ ۰.۸۳۷	۰.۸۳۷ ۰.۸۳۷	۰.۸۳۷ ۰.۸۳۷	۰.۸۳۷ ۰.۸۳۷	۰.۸۳۷ ۰.۸۳۷	۰.۸۳۷ ۰.۸۳۷	۰.۸۳۷ ۰.۸۳۷
	λ	AL ۰.۸۲۸ ۰.۸۲۸	۰.۸۳۷ ۰.۸۳۷	۰.۸۳۸ ۰.۸۳۸	۰.۸۳۷ ۰.۸۳۷	۰.۸۳۷ ۰.۸۳۷	۰.۸۳۷ ۰.۸۳۷	۰.۸۳۷ ۰.۸۳۷	۰.۸۳۷ ۰.۸۳۷	۰.۸۳۷ ۰.۸۳۷	۰.۸۳۷ ۰.۸۳۷
فاصله معتبر HPD	θ	AL ۰.۸۲۸ ۰.۸۲۸	۰.۸۳۷ ۰.۸۳۷	۰.۸۳۸ ۰.۸۳۸	۰.۸۳۷ ۰.۸۳۷	۰.۸۳۷ ۰.۸۳۷	۰.۸۳۷ ۰.۸۳۷	۰.۸۳۷ ۰.۸۳۷	۰.۸۳۷ ۰.۸۳۷	۰.۸۳۷ ۰.۸۳۷	۰.۸۳۷ ۰.۸۳۷
	λ	AL ۰.۸۲۸ ۰.۸۲۸	۰.۸۳۷ ۰.۸۳۷	۰.۸۳۸ ۰.۸۳۸	۰.۸۳۷ ۰.۸۳۷	۰.۸۳۷ ۰.۸۳۷	۰.۸۳۷ ۰.۸۳۷	۰.۸۳۷ ۰.۸۳۷	۰.۸۳۷ ۰.۸۳۷	۰.۸۳۷ ۰.۸۳۷	۰.۸۳۷ ۰.۸۳۷
	μ	AL ۰.۸۲۸ ۰.۸۲۸	۰.۸۳۷ ۰.۸۳۷	۰.۸۳۸ ۰.۸۳۸	۰.۸۳۷ ۰.۸۳۷	۰.۸۳۷ ۰.۸۳۷	۰.۸۳۷ ۰.۸۳۷	۰.۸۳۷ ۰.۸۳۷	۰.۸۳۷ ۰.۸۳۷	۰.۸۳۷ ۰.۸۳۷	۰.۸۳۷ ۰.۸۳۷
	θ	AL ۰.۸۲۸ ۰.۸۲۸	۰.۸۳۷ ۰.۸۳۷	۰.۸۳۸ ۰.۸۳۸	۰.۸۳۷ ۰.۸۳۷	۰.۸۳۷ ۰.۸۳۷	۰.۸۳۷ ۰.۸۳۷	۰.۸۳۷ ۰.۸۳۷	۰.۸۳۷ ۰.۸۳۷	۰.۸۳۷ ۰.۸۳۷	۰.۸۳۷ ۰.۸۳۷
	λ	AL ۰.۸۲۸ ۰.۸۲۸	۰.۸۳۷ ۰.۸۳۷	۰.۸۳۸ ۰.۸۳۸	۰.۸۳۷ ۰.۸۳۷	۰.۸۳۷ ۰.۸۳۷	۰.۸۳۷ ۰.۸۳۷	۰.۸۳۷ ۰.۸۳۷	۰.۸۳۷ ۰.۸۳۷	۰.۸۳۷ ۰.۸۳۷	۰.۸۳۷ ۰.۸۳۷

۷- مثال‌های داده واقعی

در این بخش با استفاده از نمونه داده واقعی روش‌های پیشنهادی در مقاله را مورد ارزیابی قرار می‌دهیم و هدف اصلی آن است که نشان دهیم که توزیع نمایی با پارامتر مکان در مقایسه با توزیع نمایی بهتر عمل می‌کند. در برآورد بیزی مقادیر ابر پارامترهای $a_1 = a_2 = 1$ و $b_1 = b_2 = 0$ میانگین مربع خطا به عنوان معیار ارزیابی در نظر گرفته شده است.

۷-۱- مثال بیماران ملانوم

مجموعه داده‌های بیماران ملانوم در سال ۲۰۰۳ توسط لی و وانگ ارائه شده است. این مجموعه داده‌ها شامل ۳۰ بیمار ملانوم جهت بررسی توانایی در طول درمان است. همه بیماران انتخاب شده قبل از اولین شروع درمان هیچ‌گونه علام بیماری ملانوم را نداشته‌اند. این مجموعه داده عبارت‌اند از:

داده‌ها.....

که در آن مشاهدات سانسور شده با علامت (+) نشان داده شده است. و مدل‌های برازش عبارت‌اند از:

(i) توزیع نمایی دو پارامتری با پارامتر مقیاس β و پارامتر مکان μ

(ii) توزیع نمایی پارامتری با پارامتر β .

برای نیکویی برازش از برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامترها، استفاده شده است. به طوری که موارد زیر

(i) منهای لگاریتم تابع درستنمایی

(ii) معیار اطلاع آکائیک (AIC)

(iii) معیار اطلاع بیزی (BIC)

(iv) آماره کولموگوروف - اسمیرنف (K-S)

(v) تابع توزیع تجربی (ECDF).

را در نظر می‌گیریم. معیار اطلاع آکائیک معیار مناسب برای نیکویی برازش است که در سال ۱۹۷۴ توسط آکائیک ارائه شده است. و برای برازش مدل‌ها ممکن است

چندین مدل بر اساس معیار آکائیک رتبه‌بندی و مدلی که دارای کمترین مقدار اطلاع آکائیک است برای مجموعه داده‌ها انتخاب می‌شود. فرمول معیار آکائیک برابر با

$$AIC = 2k - 2\log(L)$$

که در آن k تعداد پارامترهای مدل آماری و L حداکثر مقدار تابع درستنمایی برای مدل برآورد شده است. معیار اطلاع بیزی (BIC) یک معیار انتخاب مدل در میان یک دسته از مدل‌ها با تعداد مختلف پارامترها است، که در سال ۱۹۷۸ توسط شوارتز پیشنهاد شده و شبیه معیار اطلاع آکائیک است. در اینجا هم برای برازش مدل‌ها ممکن است، چندین مدل بر اساس معیار بیزی رتبه‌بندی و مدلی که دارای کمترین مقدار اطلاع آکائیک است برای مجموعه داده‌ها انتخاب می‌شود. فرمول معیار اطلاع بیزی برابر با

$$BIC = k\log(n) - 2\log(L)$$

که در آن k تعداد پارامترهای مدل آماری و L حداکثر مقدار تابع درستنمایی برای مدل و n تعداد مشاهدات مجموعه داده‌هاست (جداول ۹، ۱۰).

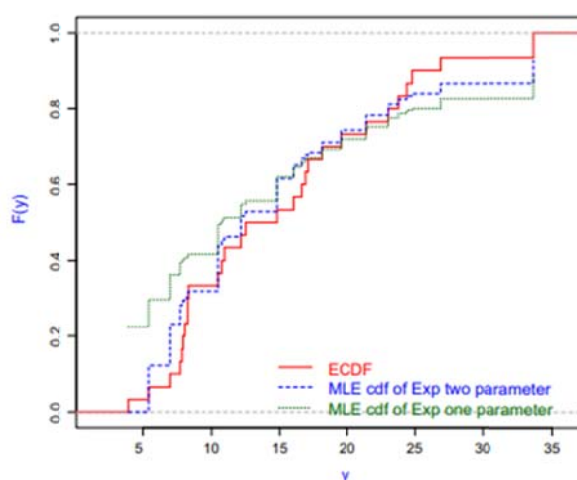
در تمام معیارهای نیکویی برازش، مقادیر منهای لگاریتم درستنمایی، معیار اطلاع آکائیک، معیار اطلاع بیزی و آماره D در آزمون $K-S$ ، برای توزیع نمایی دو پارامتر نسبت به توزیع نمایی یک پارامتری بسیار کمتر است. همچنین، P - مقدار آزمون $K-S$ بسیار بیشتر از سطح معنی‌داری است که نتیجه آن قبول مدل توزیع نمایی دو پارامتری در مقایسه با توزیع نمایی یک پارامتری است. بنابراین توزیع نمایی دو پارامتری بسیار بهتر از توزیع نمایی یک پارامتری عمل می‌کند. با توجه به نمودار توزیع تجمعی رفتار آنها مقایسه می‌شوند. در شکل ۱، منحنی برآورد ماکزیمم درستنمایی pdf برای نمایی دو پارامتری (μ, β) نزدیک به منحنی CFD تجربی است. از این رو، نتیجه می‌شود برازش این مجموعه داده واقعی، به کمک توزیع نمایی دو پارامتری با پارامترهای مقیاس و مکان در مقایسه با توزیع نمایی یک پارامتری با پارامتر مقیاس بسیار بهتر است.

جدول ۹- برآورد پارامترها

توزیع	MLE	برآورد بیز	ETT	فاصله اطمینان
$Exp(\mu, \beta)$	$\hat{\mu} = 39$	$\mu^* = 3,4636$	$\overline{ETT} = 49,5760$	$\mu = (2,3491, 3,9100)$
	$\hat{\theta} = 34,3$	$\theta^* = 32,1985$	$OBTT = 33,70$	$\theta = (12,2945, 56,3055)$
	$\hat{\lambda} = 17,15$	$\lambda^* = 17,5359$		$\lambda = (9,3699, 24,9301)$
	$\hat{\beta} = 0,08746$			
$Exp(\beta)$	$\hat{\theta} = 46$	$\theta^* = 57,5000$	$\overline{ETT} = 61,2565$	$\theta = (17,4889, 74,5111)$
	$\hat{\lambda} = 23$	$\lambda^* = 25,5556$	$OBTT = 33,7000$	$\lambda = (12,9198, 33,0802)$
	$\hat{\beta} = 0,06521$			

جدول ۱۰- خلاصه آماره های نیکویی برازش مدل

توزیع	$-Log L$	AIC	BIC	K-S آزمون		ECDF شکل
				D آماره	P value	
$Exp(\mu, \beta)$	۱۲۲/۱۹۱۴	۲۵۰/۳۸۲۸	۲۵۴/۵۸۶۴	۰/۱۸۲۸	۰/۲۳۸	شکل ۱
$Exp(\beta)$	۱۳۰/۹۹۶۳	۲۶۵/۹۹۲۶	۲۶۸/۷۹۵	۰/۲۹۵۷	۰/۰۰۸۰۵۶	



شکل ۱- منحنی cdf برای بیمار ملانوم

۷-۲- مثال طول عمر لنت ترمز دیسک

در این بخش، ما یک مجموعه داده واقعی که داده‌ها شامل طول عمر (در کیلومتر) لنت ترمز دیسک جلو است که مجموعه تصادفی از ۴۰ ماشین (یک مدل) که توسط یک فروشنده بررسی می‌شد انتخاب شده است. مقادیر در زیر نشان داده شده است: طول عمر پدهای ترمز دیسک در ۴۰ اتومبیل، طول عمر پد (۱۰۰۰ کیلومتر):

۸۶/۲، ۴۵/۱، ۵۲/۱، ۵۴/۲، ۵۹/۰، ۳۸/۴، ۴۱/۰، ۵۶/۴، ۸۱/۳، ۶۲/۴، ۴۵/۵، ۳۶/۷، ۴۲/۲، ۵۱/۶، ۳۴/۴، ۲۲/۷، ۲۲/۶، ۴۰/۰، ۳۸/۸، ۵۰/۲، ۴۸/۸، ۸۱/۷، ۶۱/۵، ۵۳/۶، ۵۰/۷، ۴۲/۸، ۱۰۲/۵، ۴۲/۷، ۸۰/۶، ۶۴/۵، ۷۳/۱، ۲۸/۴، ۴۶/۹، ۴۹/۳۳، ۸/۹، ۵۹، ۳۱/۷، ۳۳/۹، ۵۰/۶، ۵۶/۷.

در اینجا (+) مشاهدات سانسور شده را نشان می‌دهد. در اینجا، نسبت مجموعه داده‌ها در دو مدل آماری بررسی می‌شود:

(iii) توزیع نمایی دو پارامتری با پارامتر مقیاس β و پارامتر مکان μ

(iv) توزیع نمایی دو پارامتری با پارامتر β .

برای برآورد پارامترهای این دو مدل، از روش ماکسیمم درستنمایی استفاده شده است. برای نیکویی برازش مدل‌های فوق، در نظر می‌گیریم:

(vi) منفی لگاریتم درستنمایی

(vii) معیار اطلاع (AIC) Akaike

(viii) معیار اطلاع بیزی (BIC)

(ix) آماره Kolmogorov-Smirnov (K-S)

(x) تابع توزیع تجمعی تجربی (ECDF).

معیار اطلاعات آکائیک AIC میزان صحت تناسب یک مدل آماری برآورد شده که توسط آکائیک فرض شده است را نشان می‌دهد. چندین مدل رقابت ممکن است بر اساس معیار اطلاعات آکائیک خود رتبه‌بندی شوند، در حالی که یکی از آنها دارای کمترین معیار اطلاعات آکائیک است که برای مجموعه داده‌های داده شده مناسب است. معیار معیار اطلاعات آکائیک با فرمول $AIC = 2k - 2\log(L)$ ارائه می‌شود. k تعداد پارامترهای مدل آماری و L حداکثر مقدار تابع درستنمایی برای مدل برآورد شده است.

معیار اطلاع بیزی یک معیار برای انتخاب مدل در میان یک دسته از مدل‌های پارامتری با تعداد مختلف پارامترها است که توسط شوارتز پیشنهاد شد. این شبیه به معیار اطلاعات آکائیک است. برای یک مجموعه داده‌ها، مانند معیار اطلاعات آکائیک، ممکن است چندین مدل رقابتی براساس معیار اطلاع بیزی خود رتبه‌بندی شوند، آنکه دارای کمترین معیار اطلاع بیزی است بهترین می‌باشد. در معیار اطلاع بیزی تاوان (امتیاز منفی) برای پارامترهای اضافی قوی‌تر از معیار اطلاعات آکائیک است. معیار اطلاع بیزی با استفاده از فرمول زیر ارائه می‌شود:

$$BIC = k \log(n) - 2 \log(L).$$

k تعداد پارامترهای مدل آماری و L حداکثر مقدار تابع درستنمایی برای مدل برآورد شده است و n تعداد مشاهدات در مجموعه داده‌هاست. با تمام معیارهای بالا از نیکویی، می‌بینیم که مقادیر منفی لگاریتم درستنمایی، معیار اطلاعات آکائیک، معیار اطلاعات بیزی و آماره D آزمون $K-S$ ، برای توزیع نمایی دو پارامتر نسبت به توزیع نمایی یک پارامتری بسیار کمتر است. همچنین، مقدار P آزمون $K-S$ بسیار بیشتر از سطح معنی‌داری است که نتیجه آن قبول مدل توزیع نمایی دوپارامتری است، اما توزیع نمایی یک پارامتری رد می‌شود. بنابراین توزیع نمایی دو پارامتری بسیار بهتر از توزیع نمایی یک پارامتری است. در نمودار توزیع تجمعی، منحنی‌ها را به‌دست می‌آوریم و رفتار آنها مقایسه می‌شوند. در اینجا دو توزیع نمایی مورد بحث قرار می‌گیرد. (جدول ۱۱)

جدول ۱۱- برآورد پارامترها

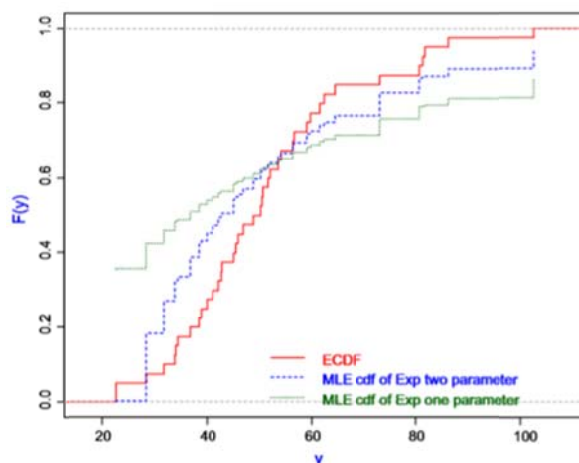
توزیع	MLE	برآورد بیز	ETT	فاصله اطمینان
$Exp(\mu, \beta)$	$\hat{\mu} = 22.6$ $\hat{\theta} = 37$ $\hat{\lambda} = 127.44$ $\hat{\beta} = 0.003487$	$\mu^* = 21.8274$ $\theta^* = 36.8669$ $\lambda^* = 117.4014$	$\overline{ETT} = 45.2872$ $OBTT = 102.500$	$\mu = (19.7553, 22.6114)$ $\theta = (23.6367, 50.3633)$ $\lambda = (79.0015, 212.8712)$
$Exp(\beta)$	$\hat{\theta} = 66.86$ $\hat{\lambda} = 227.8$ $\hat{\beta} = 0.0195$	$\theta^* = 70.7241$ $\lambda^* = 293.000$	$\overline{ETT} = 219.3823$ $OBTT = 102.500$	$\theta = (42.8708, 89.4518)$ $\lambda = (79.0015, 376.7763)$

برای بررسی نیکویی، معیارهای مورد بحث در بخش قبلی را در نظر می‌گیریم. برای مجموعه داده‌های صفحه لنت ترمز، خلاصه‌ای از آزمون آماری در زیر آمده است (جدول ۱۲).

جدول ۱۲- خلاصه آماره‌های نیکویی برازش مدل

توزیع	-Log L	AIC	BIC	K-S آزمون		ECDF شکل
				آماره	P value	
$\text{Exp}(\mu, \beta)$	۵۶۷۶/۱۹۵	۱۳۵۲/۳۹۷	۲۰۱۸/۴۰۲	۲۲۳۶/۰	۳۰۷۶/۰	شکل ۲
$\text{Exp}(\beta)$	۸۱۴۷/۲۱۸	۶۲۹۴/۴۴۱	۰۰۷۱/۴۴۵	۳۸۶۱/۰	۰۰۰۰۰۷/۰	

با استفاده از معیارهای فوق، می‌بینیم که توزیع نمایی دو پارامتری بسیار خوب است. همچنین در شکل ۲ نشان داده شده است، که برای توزیع نمایی دو پارامتری، منحنی برآورد ماکسیمم درست‌نمایی cdf بسیار نزدیک به منحنی تجربی است، در حالی که توزیع نمایی یک پارامتری دورتر از منحنی cdf عمل می‌کند.



شکل ۲- منحنی cdf برای طول عمر لنت ترمز دیسک

در نهایت، نتیجه می‌گیریم که معرفی پارامتر آستانه μ برای دستیابی به نتایج دقیق و دوره گارانتی مدل، سودمندتر است. پس از وارد کردن پارامتر آستانه، زمان آزمون بسیار کمتر از توزیع نمایی یک پارامتری است. از این رو، با در نظر گرفتن هر دو نوع برآوردی و تجربی، تحلیل می‌کنیم که معرفی یک پارامتر آستانه برای به‌دست آوردن نتایج دقیق بسیار مفید و ضروری است.

۸ - نتیجه‌گیری

داده‌های تصادفی سانسور شده اغلب در تجزیه و تحلیل بقا و نظریه قابلیت اطمینان رخ می‌دهد. در نوشته‌ها، با توزیع‌های آماری مختلف، داده‌های تصادفی سانسور شده به‌منظور برآورد، مورد بررسی قرار گرفته‌اند. هیچ یک از آنها مدت زمان گارانتی یا حداقل زمان بقاء را در مدل در نظر نگرفته‌اند. شناسایی پارامتر مکان، بر برآوردهایی که بر اساس داده‌های طول عمر هستند، تأثیر خواهد داشت. بنابراین، هدف اصلی این مقاله معرفی پارامتر مکان در طول عمر و مدل‌های سانسوری زمان است.

در این مقاله روش‌های مختلف برای برآورد پارامترهای مکان و مقیاس توزیع نمایی دو پارامتری را مورد بررسی قرار دادیم. در اینجا روش‌های برآورد کلاسیک مانند روش برآورد حداکثر درست‌نمایی، روش گشتاوری، L-گشتاوری برآوردهای کمترین مربعات در نظر گرفته شد. همچنین برآوردهای بیز و فواصل اطمینان HPD برای پارامترها تحت تابع زیان‌های مختلف آورده شده است. از لحاظ نظری، مقایسه روش‌های مختلف امکان‌پذیر نیست و ما از شبیه‌سازی مونت کارلو برای مقایسه عملکرد برآوردهای مختلف پارامترها و نیز ویژگی‌های قابلیت اطمینان استفاده کردیم. مقایسه برآوردهای مختلف به طور عمده با توجه به خطا و میانگین مربع خطاست. با توجه به اطلاعات پیشین اضافی، گاهی اوقات برآوردهای بیز تخمین‌های بهتر از MLE را فراهم می‌کرد. برای نشان دادن روش‌های برآورد در این مقاله، مثال واقعی آورده شده است.

مرجع‌ها

- [1] Abu-Taleb A.A., Smadi, M.M. and Alawneh, A.J. (2007). Bayes estimation of the lifetime parameters for the exponential distribution. J. Math. Stat., 3, 106–108.
- [2] Akaike, H. (1974). A new look at the statistical model identification. IEEE Trans Autom Control, 19, 716–723.
- [3] Breslow, N. and Crowley, J. (1974). A large Sample Study of the lifetable and product limit estimates under random censorship. Ann. Stat., 2, 437–453.

- [4] Calabria, R. and Pulcini, G. (1996). Point estimation under asymmetric loss functions for left-truncated exponential samples. *Commun. Stat. Theory Methods*, 25, 585–600.
- [5] Chen, M.H. and Shao, Q.M. (1999). Monte Carlo estimation of Bayesian credible and HPD intervals. *J. Comput. Graph. Stat.*, 8, 69–92.
- [6] Csorgo, S. and Horvath, L. (1981). On the Koziol–Green model for random censorship. *Biometrika*, 68, 391–401.
- [7] Danish, M.Y. and Aslam, M. (2013). Bayesian estimation for randomly censored generalized exponential distribution under asymmetric loss functions. *J. Appl. Stat.*, 40, 1106–1119.
- [8] Danish, M.Y. and Aslam, M. (2014). Bayesian inference for the randomly censored Weibull distribution. *J. Stat. Comput. Simul.*, 84, 215–230.
- [9] Dey, S., Dey, T. and Kundu, D. (2014). Two-parameter Rayleigh distribution: different methods of estimation. *Am. J. Math. Manage. Sci.*, 33, 55–74.
- [10] Friesl, M. and Hurt, J. (2007). On Bayesian estimation in an exponential distribution under random censorship. *Kybernetika*, 43, 45–60.
- [11] Garg, R., Dube, M., Kumar, K. and Krishna, H. (2016). On randomly censored generalized inverted exponential distribution. *Am. J. Math. Manage. Sci.*, 35, 361–379.
- [12] Ghitany, M.E. (2001). A compound Rayleigh survival model and its application to randomly censored data. *Stat. Papers*, 42, 437–450.
- [13] Ghitany, M.E. and Al-Awadhi, S. (2002). Maximum likelihood estimation of Burr XII distribution parameters under random censoring. *J. Appl. Stat.*, 29, 955–965.

- [14] Krishna. H. and Vivekanand Kumar, K. (2015). Estimation in Maxwell distribution with randomly censored data. J. Stat. Comput. Simul., 85, 3560–3578.
- [15] Lawless, J.F. (2003). Statistical methods and models for lifetime data. Wiley, New York.
- [16] Lee, E.T. and Wang, J.W. (2003). Statistical methods for survival data analysis. Wiley, Hoboken.
- [17] Saleem, M. and Aslam, M. (2009). On Bayesian analysis of the Rayleigh survival time assuming the random censor time. Pak. J. Stat., 25, 71–82.
- [18] Saleem, M. and Raza, A. (2011). On Bayesian analysis of the exponential survival time assuming the exponential censor time. Pak. J. Sci., 63, 44–48.

فاطمه گودرزی معصومی

فوق لیسانس آمار

تهران، حکیمیه، سازمان آب، دانشگاه پیام نور، گروه آمار.
رایانشانی: