

منحنی‌های لورنتس پارامتری و ارتباط آن با شاخص‌های قابلیت اعتماد

زهرا بهدانی، غلامرضا محتشمی برزادران و بهرام صادق‌پور گیلده

دانشگاه فردوسی مشهد

چکیده: مشکل فقر را نمی‌توان بدون توجه دقیق به مسئله‌ی توزیع درآمد مورد بررسی قرار داد. در واقع مفهوم فقر به پایین‌ترین طبقه در رده‌بندی توزیع درآمد، و نابرابری در توزیع درآمد به تمام طبقات جامعه مربوط می‌شود. بر اساس توزیع درآمدهایی که به‌طور غیرعادلانه صورت می‌گیرد، به منظور سنجش میزان نابرابری اقتصادی، (توزیع ناعادلانه‌ی درآمد) شاخص‌های زیادی ابداع شده است. یک ابزار مهم برای سنجش میزان نابرابری اقتصادی منحنی لورنتس است. یک روش برآورد منحنی لورنتس، استفاده از یک فرم پارامتری از منحنی‌های لورنتس روی داده‌ها است. در این مقاله برخی از منحنی‌های لورنتس پارامتری را معرفی کرده و در نهایت مدل‌های معرفی‌شده را به داده‌های درآمد و هزینه‌ی سال ۱۳۹۵ استان خراسان جنوبی و کشور برآزش داده و بهترین مدل را انتخاب می‌کنیم. در نهایت تابع چندک متناظر با مدل‌های معرفی‌شده را محاسبه می‌کنیم.

واژگان کلیدی: منحنی لورنتس؛ منحنی لورنتس تغییر شکل‌یافته؛ تابع چندک؛ شاخص‌های نابرابری.

۱- مقدمه

یکی از مهم‌ترین وظایف اقتصادی دولت کنترل وضعیت نابرابری درآمد است، زیرا وظیفه‌ی توزیع حکم می‌کند دولت به منظور کاهش نابرابری، چگونگی تغییرات درآمدهای افراد جامعه را با استفاده از ابزارهای موجود تحلیل کند. لذا سنجش و اندازه‌گیری

* نویسنده‌ی عهده‌دار مکاتبات

دریافت: ۱۳۹۷/۴/۱۳، پذیرش: ۱۳۹۸/۳/۲۸.

نابرابری درآمد و نیز کاهش شدت نابرابری درآمد همواره مورد توجه دولت‌مردان، سیاست‌مداران و اقتصاددانان بوده است. اما سیاست‌گذاری مناسب در این راستا مستلزم آگاهی دقیق و درست از شدت نابرابری درآمدی در جامعه و اندازه‌گیری آن با ابزارهای مناسب و معتبر است.

بر اساس توزیع درآمدهایی که به‌طور غیرعادلانه صورت می‌گیرد، به منظور سنجش میزان نابرابری اقتصادی (توزیع ناعادلانه درآمد) شاخص‌های زیادی ابداع شده است. منحنی لورنتس، ابزاری مهم برای سنجش میزان نابرابری اقتصادی است، که برای اولین بار لورنتس [۱۱] در رساله‌ی دکترای خود معرفی کرد که تفسیر روشنی از نابرابری را نشان می‌دهد. برای دستیابی به منحنی لورنتس، روی محور افقی درصد تجمعی درآمدها را که بین گروه‌های مختلف درآمدی توزیع می‌شود و سهم آن‌ها را تشکیل می‌دهد و روی محور عمودی درصد‌های متناظر افراد را قرار می‌دهیم. اگر توزیع درآمدها به‌طور عادلانه صورت گیرد، خط مستقیمی (در واقع قطر اصلی مربع حاصل) به‌دست می‌آید. در صورتی که توزیع درآمدها ناعادلانه و نابرابر باشد منحنی محدبی حاصل می‌شود. خط مستقیم مذکور و حاصل از حالت اول، به خط توزیع کاملاً عادلانه معروف است، و منحنی محدب حاصل، منحنی لورنتس نامیده می‌شود.

تعریف ۱. برای متغیر تصادفی پیوسته و نامنفی X با تابع توزیع $F(x)$ ، میانگین $\mu = E(X)$ و تابع چنک $F^{-1}(u) = \sup\{x: F(x) \leq u\}$ منحنی لورنتس با رابطه‌ی زیر تعریف می‌شود:

$$(۱) \quad L(u) = \frac{1}{E(X)} \int_0^u F^{-1}(t) dt, \quad u = [0, 1]$$

با توجه به رابطه‌ی (۱) مشخص است که تابع لورنتس تابعی صعودی، محدب، پیوسته با $L(0) = 0$ و $L(1) = 1$ است. بر عکس هر تابع با این ویژگی‌ها یک تابع لورنتس از یک توزیع آماری معین است [۱۹]. شاخص‌های مختلفی بر اساس منحنی لورنتس، برای سنجش میزان نابرابری درآمد در جامعه، تعریف می‌شوند. ضریب جینی مهم‌ترین آن‌ها است. ضریب جینی به صورت دو برابر ناحیه‌ی بین منحنی لورنتس و خط قطر تعریف می‌شود که همواره نامنفی و مقداری بین صفر و یک است. در حالت برابری اقتصادی یعنی زمانی که $L(u) = u$ است، ضریب جینی برابر صفر و در حالت نابرابری کامل

مقدار این ضریب یک خواهد بود. در این حالت توزیع ثروت به گونه‌ای است که کل ثروت تنها در دست یک نفر است و مابقی هیچ درامدی ندارند. اگر متغیر تصادفی X دارای تابع لورنتس $L(u)$ باشد، ضریب جینی آن برابر است با:

$$(۲) \quad G = 2 \int_0^1 [u - L(u)] du = 1 - 2 \int_0^1 L(u) du$$

یک ابزار ساده برای مقایسه‌ی تغییرپذیری متغیرهای تصادفی نامنفی ترتیب لورنتس است. که بر اساس تابع‌های لورنتس تحت عنوان ترتیب جزئی لورنتس تعریف می‌شود و در بسیاری از زمینه‌ها کاربردهای مفیدی دارد.

تعریف ۰۲. برای متغیرهای تصادفی نامنفی X_1, X_2 با میانگین متناهی و توابع لورنتس L_1, L_2 ترتیب لورنتس را به $X_1 \geq_L X_2$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(۳) \quad X_1 \geq_L X_2 \Leftrightarrow L_1(u) \leq L_2(u), \forall u \in [0, 1]$$

که X_1 بزرگ‌تر از X_2 در حالت لورنتس خوانده می‌شود. در این حالت منحنی لورنتس X_2 همواره بالاتر از منحنی لورنتس X_1 قرار دارد و یا X_2 ناهمواری کم‌تری نسبت به X_1 نمایش می‌دهد. با توجه به تعریف واضح است:

$$X_1 \leq_L X_2 \Rightarrow X_1 \leq_G X_2$$

$X_1 \leq_G X_2$ ترتیب جینی است که مشابه ترتیب لورنتس تعریف می‌شود.

ساده‌ترین روش برآورد منحنی لورنتس، روش برآورد تجربی است که در آن منحنی لورنتس به‌طور نقطه به نقطه برآورد شده و از اتصال آن‌ها به هم منحنی لورنتس پدید می‌آید. به دلیل سادگی این روش بسیاری از محققین اقتصادی از همین روش برای برآورد منحنی لورنتس استفاده می‌کنند. اما به جز این روش (که یک روش ناپارامتری است) دو روش دیگر نیز برای برآورد (منحنی یا تابع لورنتس) وجود دارد. روش اول فرض یک صورت تابعی خاص از تابع توزیع‌های آماری فرضی برای تقریب توزیع درامد تجربی و آنگاه یافتن منحنی لورنتس متناظر با آن است. روش دوم استفاده از یک صورت پارامتری از منحنی‌های لورنتس روی داده‌ها است. در دهه‌های اخیر، با توجه به اهمیت منحنی لورنتس در تحلیل‌های اقتصادی و آماری ناهمواری‌های درآمد، شمار زیادی از مدل‌های پارامتری توسط پژوهش‌گران مختلف برای مدل‌بندی منحنی لورنتس پیشنهاد شده‌است. برخی محققین مستقیماً خانواده‌ای از منحنی‌های لورنتس را معرفی کرده‌اند. سارابیا و

همکاران [۱۶] یک سلسله از منحنی‌های لورنتس را که روی لامبدای توکی تعمیم‌یافته (Generalized Tukey lambda) پایه‌ریزی شده بود بدست آورد. در این روش زمانی که شرایط خاصی برقرار باشد منحنی‌های لورنتس سلسله مراتبی ساخته می‌شوند و دقیقاً به همان خوبی آزمون‌های تجربی نتیجه می‌دهند. استفاده از توابع فرضی برای یافتن منحنی لورنتس، ممکن است باعث به وجود آمدن عبارت‌های پیچیده شود یا یک شکل بسته که قابل حل باشد را بدست ندهد. سارایا و همکاران [۱۶]، یک خانواده از منحنی‌های لورنتس را که ترکیبی از دیگر منحنی‌های لورنتس می‌باشد (منحنی‌های لورنتس سلسله مراتبی) معرفی کردند. تلاش‌های پیشگامانی چون کاکوانی و پودر [۹] و [۱۰] و کاکوانی [۸] با معرفی مدل‌های مستقیم از تابع لورنتس باعث انقلاب عظیمی در این زمینه شد. وانگ و همکاران [۲۰] یک ساختار وزنی از منحنی لورنتس را به‌عنوان یک روش پارامتری معرفی کردند و شرایطی که ساختار معرفی شده یک منحنی لورنتس باشد را بررسی نمودند. سوردو و همکاران [۱۷] یک حالت تغییر شکل‌یافته و یا تابعی از منحنی لورنتس را به‌عنوان یک شکل پارامتری معرفی کردند.

در این مقاله ابتدا در بخش ۲، برخی از منحنی‌های لورنتس پارامتری معروف را معرفی کرده بعضی از ویژگی‌های آن را ذکر می‌کنیم. در بخش ۳، برخی شاخص‌های قابلیت اعتماد را براساس این منحنی‌ها به‌دست می‌آوریم. یکی از اهداف مهم این بخش بررسی ترتیب‌های تصادفی و مفاهیم سالخورده‌گی برای متغیرهای تصادفی نظیر این منحنی‌ها، است. سپس در بخش ۴، منحنی لورنتس تجربی برای درآمد و هزینه‌ی کشور و استان خراسان جنوبی به تفکیک شهری و روستایی در سال ۱۳۹۵ رسم می‌شوند و پس از مقایسه‌ی نمودار لورنتس آن‌ها به محاسبه‌ی ضریب جینی به‌عنوان یک شاخص عددی برای مقایسه‌ی نابرابری‌های اقتصادی می‌پردازیم. در ادامه به‌منظور یافتن مدل ریاضی تابع لورنتس، چند منحنی پارامتری به لورنتس تجربی برازش داده و بهترین مدل را انتخاب می‌کنیم. در نهایت با استفاده از مدل انتخابی توزیع مناسب داده‌ها و برخی از مشخصه‌های آن را بدست می‌آوریم.

۲- منحنی‌های لورنتس پارامتری و تغییر شکل یافته

با توجه به ویژگی‌های منحنی لورنتس، هر تابع ریاضی که از نقاط $(0,0)$ و $(1,1)$ عبور کرده به‌طور یکنواخت صعودی و محدب باشد یک منحنی لورنتس را مشخص می‌کند. استفاده از قوس دایره یا یک قسمت از بیضی و همچنین یک مدل هذلولی نیز روش‌های پیشنهادی و کاربردی برای منحنی لورنتس هستند. اگر چه نتایج برآزش در بیش‌تر اوقات عالی و خوب است ولی پارامترهای همه‌ی این مدل‌ها ایرادها و نقص‌هایی دارد که باید در محدودیت‌های خاصی صدق کنند که برآورد و تعیین ضریب جینی را در اکثر اوقات مشکل می‌سازد.

شکل‌های پارامتری در نظر گرفته‌شده برای این منحنی نامحدوند. کاکوانی و پودر [۹] و [۱۰] دو شکل را پیشنهاد دادند. شکل ارائه‌شده در [۹] به صورت زیر است:

$$(۴) \quad L(u) = u^{\delta} e^{\eta(1-u)}, \quad 0 < u < 1$$

یک خانواده‌ی پارامتری لورنتس دیگر که توسط راش [۱۴] پیشنهاد شد به شکل زیر است:

$$L(u) = \left[1 - (1-u)^{\alpha} \right]^{\frac{1}{\beta}}, \quad 0 < u < 1$$

که $0 < \alpha, \beta \leq 1$ است. این یک تعمیم مستقیم از منحنی لورنتس توزیع پارتو (با قرار دادن $\beta = 1$ و $\alpha < 1$) است و برای $\alpha = \beta$ منحنی لورنتس حاصل نیمه متقارن است. ضریب جینی برای (۴) به صورت زیر است:

$$G = 1 - \frac{2}{\alpha} B\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta} + 1\right)$$

که $B\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta} + 1\right)$ تابع بتا با پارامترهای $\frac{1}{\alpha}$ و $\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)$ است.

در دیدگاه منحنی‌های لورنتس سلسله مراتبی، از هر منحنی لورنتس L_0 دنباله‌ی منحنی‌های بعدی، تعمیمی از مدل اولیه‌ی L_0 خواهد بود.

• $L_1(u; \alpha) = u^{\alpha} L_0(u), 0 < u < 1$ که $\alpha \geq 1$ و یا $0 \leq \alpha < 1$ و

$$L_0''(u) \geq 0$$

$$\bullet \quad L_{\gamma}(u; \gamma) = \{L_{\circ}(u)\}^{\gamma}, \quad 0 < u < 1 \quad \text{و} \quad \gamma \geq 1$$

$$\bullet \quad L_{\gamma}(u; \alpha, \gamma) = u^{\alpha} \{L_{\circ}(u)\}^{\gamma}, \quad 0 < u < 1 \quad \text{و} \quad \alpha, \gamma \geq 1$$

یک مزیت این دیدگاه محاسبه‌ی آسان ترتیب‌های لورنتس است. در حقیقت برای منحنی‌های سلسه مراتبی معرفی شده:

$$\bullet \quad L_{\gamma_1}(u; \alpha_1) \geq_L L_{\gamma_2}(u; \alpha_2) \quad \text{اگر و فقط اگر} \quad \alpha_1 \geq \alpha_2 > 0$$

$$\bullet \quad L_{\gamma_1}(u; \gamma_1) \geq_L L_{\gamma_2}(u; \gamma_2) \quad \text{اگر و فقط اگر} \quad \gamma_1 \geq \gamma_2 > 0$$

یک ترکیب از حالت‌های قبل L_{γ} را نتیجه می‌دهد.

برای مثال سارابیا و همکاران [۱۶]، در یک حالت خاص (منحنی لورنتس توزیع پارتو)

آورده‌ای از منحنی‌های لورنتس پارامتری را به‌دست آوردند که در جدول ۱ خلاصه شده است (مقادیر پارامترها در جدول مشابه پارامترهای منحنی لورنتس سلسله مراتبی است).

جدول ۱- منحنی‌های لورنتس پارامتری خانواده‌ی توزیع پارتو.

منحنی‌های لورنتس پارامتری خانواده توزیع پارتو	
منحنی لورنتس	ضریب جینی
$L_{\circ}(u) = 1 - (1 - u)^k$	$\frac{1 - k}{1 + k}$
$L_{\gamma}(u) = u^{\alpha} [1 - (1 - u)^k]$	$1 - 2 [B(\alpha + 1, 1) - B(\alpha + 1, k + 1)]$
$L_{\gamma}(u) = [1 - (1 - u)^k]^{\gamma}$	$1 - \frac{2}{k} B(k^{-1}, \gamma + 1)$
$L_{\gamma}(u) = u^{\alpha} [1 - (1 - u)^k]^{\gamma}$	$1 - 2 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\Gamma(i - \gamma)}{\Gamma(i + 1) \Gamma(-\gamma)} \times B(\alpha + 1, ki + 1)$

در ادامه مدل‌های پارامتری دیگری ارائه شده است.

$$\bullet \quad L_{\gamma}(u) = \frac{e^{au-1}}{e^{a-1}}, \quad \alpha > 0$$

$$\begin{aligned}
 & L_{\gamma}(u) = u\alpha^{u-1}, \alpha > 0 \quad \bullet \\
 & L_{\gamma}(u) = \frac{u(\alpha-1)}{\alpha-u}, \alpha > 1 \quad \bullet \\
 & L_{\gamma}(u) = u\alpha e^{-\beta(1-u)}, \alpha \geq 1, \beta > 0 \quad \bullet \\
 & L_{\delta}(u) = u^{\gamma} [1 - (1-u)^{\alpha}]^{\beta}, \gamma \geq 0, 0 < \alpha \leq 1 \quad \bullet \\
 & L_{\epsilon}(u) = [1 - (1-u)^{\alpha}]^{\beta}, \beta \geq 1, 0 < \alpha \leq 1 \quad \bullet \\
 & L_{\gamma}(u) = \frac{u[1+(\alpha-1)u]}{1+(\alpha-1)u+\beta(1-u)}, \alpha, \beta > 0, \alpha - \beta < 1 \quad \bullet \\
 & L_{\lambda}(u) = u^{\gamma} [1 - (1-u)^{\alpha}]^{\beta}, \beta \geq 1, 0 < \alpha \leq 1, \gamma \geq 0 \quad \bullet \\
 & L_{\eta}(u) = u - \alpha u^{\beta} (1-u)^{\gamma}, \alpha > 0, 0 < \beta \leq 1, 0 < \gamma \leq 1 \quad \bullet
 \end{aligned}$$

چوتیکاپانیچ [۴]، گوپتا [۷] و روجد [۱۵] به ترتیب، مدل‌های یک پارامتری ساده L_{γ} ، L_{γ} و L_{δ} را پیش‌نهاد دادند. صورت تابعی L_{ϵ} توسط کاکوانی و پودر [۱۰] معرفی شده است. مدل L_{δ} بر مدل معرفی شده توسط اورنگا و همکاران [۱۲] منطبق است. مدل L_{ϵ} به مدل راش [۱۴] معروف است. آرنولد [۳] تابع هذلولی L_{γ} را به عنوان منحنی لورنتس معرفی کرد و L_{λ} حالت تعمیم یافته‌ای از شکل‌های L_{δ} و L_{ϵ} است که توسط سارابیا و همکاران [۱۶] معرفی شده است.

مدل L_{ϵ} با جایگذاری $\beta = 1$ در L_{λ} و مدل L_{ϵ} با قرار دادن $\gamma = 0$ در L_{λ} حاصل خواهد شد. تابع L_{η} توسط کاکوانی [۱۰] ارائه شده است. در بسیاری از موارد مدل‌های L_{η} و L_{λ} برای برازش یک منحنی لورنتس مناسب برای داده‌ها نسبت به سایر صورت‌ها مناسب‌تر است. برای مثال دات [۵] را ملاحظه فرمایید. سوردو و همکاران [۱۸] منحنی لورنتس تغییر شکل یافته را به صورت تغییر شکل یک منحنی لورنتس با یک تابع تغییر شکل تعریف کرد. قبل از معرفی منحنی لورنتس تغییر شکل یافته، ابتدا تابع تغییر شکل یافته را تعریف می‌کنیم.

تعریف ۳. تابع صعودی $h: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ که $h(0) = 0$ و $h(1) = 1$ را تابع تغییر شکل یافته می‌گوییم. این تابع هم‌چنین به تابع تبدیل احتمال نیز شهرت دارد [۱۸]. با استفاده از این تابع، منحنی لورنتس تغییر شکل یافته به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$L^*(u) = h(L(u))$$

در این حالت منحنی لورنتس از ترکیب یک تابع خاص (تابع تغییر شکل یافته) و منحنی لورنتس نتیجه می‌شود مشروط بر این‌که تابع مفروض ویژگی‌های منحنی لورنتس را داشته باشد. تابع $h(\cdot)$ می‌تواند خود تابعی از منحنی لورنتس باشد. برای مثال $h(u) = L(u)^\alpha$ ، $h(u) = L^{-1}(u)$ و یا تابع توزیع محدب را می‌توان به عنوان تابع $h(\cdot)$ به کار برد. این صورت بسیار کلی است و تعداد زیادی از منحنی‌های لورنتس پارامتری را می‌توان با این شکل بیان کرد.

همان‌طور که بیان شد، منحنی لورنتس تابعی محدب، صعودی و پیوسته است که $L(0) = 0$ و $L(1) = 1$. در ادامه ابتدا قضیه‌ای از پیکز [۱۳] و سپس قضیه‌ای که توسط سوردو و همکاران [۱۷] برای بیان شرایطی که منحنی لورنتس تغییر شکل یافته، منحنی لورنتس باشد را بیان می‌کنیم.

قضیه ۱. فرض کنید $L(u)$ تعریف شده روی $[0, 1]$ تابعی پیوسته با مشتق مرتبه‌ی دوم $L''(u)$ باشد در این صورت $L(u)$ منحنی لورنتس است اگر و تنها اگر

$$L(0) = 0, L(1) = 1, L'(\cdot)^+ \geq 0, L''(u) \geq 0, \forall u \in (0, 1),$$

که $L'(\cdot)^+$ مشتق راست تابع لورنتس در نقطه‌ی صفر است.

قضیه ۲. فرض کنید $L(u)$ یک منحنی لورنتس باشد و $h(u)$ تابع تغییر شکل یافته است که مشتق دوم آن وجود دارد و $h''(u) \geq 0$ به ازای هر $u \in (0, 1)$. آنگاه تابع

$$L^*(u) = h(L(u)), 0 \leq u \leq 1,$$

یک منحنی لورنتس است.

به این ترتیب، انحراف منحنی‌های لورنتس اولیه می‌تواند یک روش کلی برای مدل‌بندی خانواده‌ای از منحنی‌های لورنتس باشد. برای مثال $L_0(u) = u$ یک منحنی لورنتس اولیه است. نکته‌ی مهم دیگر در تعریف منحنی لورنتس تغییر شکل یافته این است که با توجه به محدب بودن تابع h ، برای این تابع $t \leq h(t)$ و بنا بر این

$$L(u) \geq h_1(L(u)) \geq h_2(h_1(L(u))) \geq \dots$$

برای توابع $h_1, h_2, \dots \in C$ (بزرگ‌ترین رده از توابع پیوسته‌ی غیر نزولی و نامنفی روی $[0, 1]$ است). بنا بر این در این روش علاوه بر این که یک خانواده از منحنی‌های لورنتس پارامتری تولید می‌شود ترتیب بین آن‌ها نیز به راحتی امکان‌پذیر است. نکته‌ی دیگر در این باره این است که با توجه به ویژگی‌های منحنی لورنتس، هر تابع لورنتس را می‌توان به عنوان تابع h در نظر گرفت و در این حالت منحنی لورنتس $L^*(u) = L_1(L(u))$ است. از دیگر توابعی که به عنوان تابع تغییر شکل یافته می‌توانند مورد استفاده قرار گیرند می‌توان توابعی مانند حاصل ضرب منحنی‌های لورنتس، تابع توانی منحنی لورنتس، وارون منحنی لورنتس، تابع مولد احتمال و تابع توزیع و ... را نام برد.

۳- منحنی‌های لورنتس تغییر شکل یافته و شاخص‌های قابلیت اعتماد

در دهه‌های اخیر شمار زیادی از مدل‌های پارامتری توسط پژوهش‌گران مختلف برای مدل‌بندی منحنی لورنتس براساس دیدگاه‌های متفاوت پیش‌نهاد شده‌اند. برخی محققین مستقیماً خانواده‌ای از منحنی‌های لورنتس را معرفی کردند. در بخش قبل معروف‌ترین این مدل‌ها که در برازش به منحنی‌های لورنتس تجربی موفق عمل کرده‌اند، معرفی شدند. از طرفی منحنی‌های لورنتس تغییر شکل یافته نیز یک صورت کلی است که مدل‌های بسیاری را شامل می‌شود و دستیابی به اهداف زیادی را ممکن می‌سازد از جمله نتایج مقایسه‌ای و تغییر پارامترهای مدل برای کسب بهترین برآورد و ... در این قسمت برخی شاخص‌های قابلیت اعتماد را براساس این منحنی‌ها به دست می‌آوریم. بررسی ترتیب‌های تصادفی و مفاهیم سالخورده‌گی برای متغیرهای تصادفی نظیر این منحنی‌ها از اهداف مهم است.

ذکر شد که برای هر تابع h واجد شرایط معرفی شده در تعریف ۳، منحنی لورنتس جدیدی $L^*(u) = L_{X_h}(u) = h(L_X(u))$ براساس منحنی لورنتس قدیمی $(L_X(u))$ تعریف می‌شود. با توجه به تعریف منحنی لورنتس واضح است که مشتق منحنی لورنتس با تابع چنک متناسب است و لذا تابع چنک یک متغیر تصادفی را می‌توان با مشتق‌گیری از

تابع لورنتس آن به دست آورد. حال برای منحنی‌های لورنتس تغییر شکل یافته داریم:

$$(5) \quad \begin{aligned} Q_h(u) &= \mu_h L'_{X_h}(u) \\ &= \mu_h L'_X(u) h'(L_X(u)) \end{aligned}$$

در معادله‌ی (۵)، $\mu_h = E(X_h)$ است.

مثال ۱. برای مثال اگر $h(x) = x^\gamma$ برای $\gamma \geq 1$ ، آنگاه

$$Q_h(u) = \frac{\gamma \mu_h}{\mu} Q(u) (L_X(u))^{\gamma-1}$$

در صورتی که $L(u) = u$ باشد، $Q(u) = \mu$ و $Q_h(u) = \gamma \mu_h (u)^{\gamma-1}$ است.

و اگر $h(x) = 1 - [1 - x]^\delta$ برای $0 < \delta \leq 1$ ، آنگاه

$$Q_h(u) = \frac{\delta \mu_h}{\mu} Q(u) (1 - L_X(u))^{\delta-1}$$

در صورتی که $L(u) = u$ باشد $Q_h(u) = \delta \mu_h (1 - u)^{\delta-1}$ است.

قضیه‌ی ۳. فرض کنید $L(u)$ منحنی لورنتس متغیر تصادفی نامنفی X و $h(x)$ یک تابع تغییر شکل باشد. اگر $L^*(u) = h(L(u))$ و X^* متغیر تصادفی متناظر با $L^*(u)$ باشد، آنگاه متغیر تصادفی X^* دارای تابع چگالی احتمال $f^*(x)$ است طوری که

$$(6) \quad f^*(Q^*(u)) = \frac{1}{\mu^* [h''(L(u)) [L'(u)]^2 + L''(u) h'(L(u))]}$$

با این شرط که مشتق مرتبه‌ی اول و دوم توابع $L(\cdot)$ و $h(\cdot)$ موجود باشند.

برهان. فرض کنید $x = Q(u)$ در این صورت با توجه به تعریف تابع چندان و قضایای مربوط به مشتق تابع وارون می‌توان نشان داد

$$\frac{d(Q(u))}{du} = \frac{1}{f(Q(t))},$$

و یا به عبارتی

$$(7) \quad f(Q(u)) = \frac{1}{\mu L''(u)},$$

از طرفی مشتق مرتبه‌ی اول منحنی لورنتس تغییر شکل یافته برابر است با

$$L^{*'}(u) = h'(L(u)) L'(u),$$

و مشتق مرتبه‌ی دوم آن $L^{*''}(u) = h''(L(u))[L'(u)]^2 + L''(u)h'(L(u))$ است که با جایگذاری در (۴) حکم نتیجه می‌شود. رابطه‌ی (۶) را می‌توانیم به صورت زیر بازنویسی کنیم.

$$f^*(Q^*(u)) = \frac{1}{\mu^*[h''(L(u))(\mu Q(u))^2 + \frac{h'(L(u))}{\mu f(Q(u))}]}$$

در قضیه‌ی بعدی سوردو و همکاران [۱۷] ثابت کردند که منحنی‌های لورنتس تغییر شکل یافته ترتیب‌ها را حفظ می‌کنند یعنی اگر متغیر تصادفی دارای ترتیب لورنتس کم‌تر باشد در این صورت متغیر تغییر شکل یافته‌ی حاصل از آن نیز دارای ترتیب لورنتس کم‌تر خواهد بود.

قضیه‌ی ۴ [۱۷]. فرض کنید X_1 و X_2 متغیرهای تصادفی با منحنی‌های لورنتس $L_1(u)$ و $L_2(u)$ باشند. اگر X_1^* و X_2^* متغیرهای تصادفی متناظر $L_1^*(u)$ و $L_2^*(u)$ باشند. در این صورت

- اگر $X_1 \leq_L X_2$ ، آنگاه $X_1^* \leq_L X_2^*$.
- اگر $X_1 \leq_G X_2$ ، آنگاه $X_1^* \leq_G X_2^*$.

سوردو و همکاران [۱۷] نتایجی برای مقایسه‌ی دو منحنی لورنتس که از تغییر شکل یکسان دو منحنی لورنتس اولیه حاصل شده است ارائه می‌دهند. این نتایج در حالتی که یک سیاست تبدیلی روی دو جامعه مختلف انجام شده باشد و برای مقایسه‌ی جوامع متفاوت بعد از انجام سیاست‌های یکسان مفید است.

۴-برآزش خانواده‌های پارامتری از منحنی لورنتس به داده‌های هزینه و درآمد خانوار استان خراسان جنوبی و ایران در سال ۱۳۹۵

در این بخش از مقاله، به کمک داده‌های طرح هزینه و درآمد خانوار ۱۳۹۵ به بررسی مطالب ارائه شده در بخش‌های قبل می‌پردازیم. این داده‌ها مربوط به طرح «آمارگیری از هزینه و درآمد خانوارهای شهری و روستایی» است که توسط مرکز آمار ایران و با همکاری معاونت‌های آمار سازمان‌های مدیریت و برنامه‌ریزی استان‌های کشور اجرا و نتایج آن در

قالب کتابچه‌هایی در سطح کل کشور منتشر می‌شود. به علاوه داده‌ها و نتایج خام این طرح نیز برای محققان و برنامه‌ریزان قابل دسترسی است. تحلیل و توصیف داده‌های هزینه و درآمد خانوار و مطالعه‌ی مقایسه‌ای شاخص‌های توزیع درآمد استان خراسان جنوبی با کشور طی سال‌های ۱۳۸۴ تا ۱۳۹۳، توسط بهدانی و همکاران [۱] انجام شده است.

برای هر مجموعه داده‌های معین چند روش برای یافتن منحنی لورنتس وجود دارد. یک روش که سخت‌ترین روش برآورد منحنی لورنتس نیز می‌باشد به این صورت است که ابتدا تابع چگالی مناسب درآمد را یافته، پارامترهای آن را برآورد نموده و تابع لورنتس متناظر با آن را با جایگزینی پارامترهای به دست آمده از برازش توزیع، برآورد نماییم. در این قسمت ابتدا با استفاده از ساده‌ترین راه یعنی منحنی لورنتس به طور نقطه به نقطه، منحنی لورنتس برآورد می‌شود. در این روش نیازی به هیچ‌گونه اطلاع اضافی در مورد توزیع داده‌ها نیست و از اتصال نقاط برآوردشده‌ی منحنی لورنتس آن‌ها حاصل می‌شود. در روش دیگری که مورد استفاده این بخش نیز هست استفاده از یک صورت پارامتری از منحنی لورنتس روی داده‌ها است. در این روش یک مدل از پیش تعیین شده را به داده‌های برازش می‌دهیم. در حقیقت در این حالت یک مدل رگرسیونی ناخطی به داده‌ها برازش داده می‌شود. در این جا چند صورت پارامتری از منحنی لورنتس را به داده‌ها برازش داده و نتایج حاصل گزارش شده است.

اگر برای منحنی لورنتس یک شکل پارامتری در نظر بگیریم، یک روش متداول برای برآورد پارامترها استفاده از روش کم‌ترین توان دوم خطا است. به این مفهوم که مجموعه مقادیر $(u_1, L(u_1)), \dots, (u_n, L(u_n))$ را محاسبه کرده و یک تابع (صورت تابعی لورنتس پارامتری) به داده‌ها برازش می‌دهیم. حال باید مقادیر تابع $\sum_{i=1}^n (L(u_i) - L(u_i; \theta))^2$ بر حسب پارامترهای θ کمینه شود. اگر صورت پارامتری، یک تابع خطی باشد، پارامترهای آن به روش‌های کلاسیک و در غیر این صورت به روش‌های عددی با رایانه برآورد می‌شود. از آن جا که اغلب صورت‌های تابعی لورنتس پارامتری توابع ناخطی از پارامترها هستند، برآوردهای کم‌ترین توان دوم پارامترها با روش‌های عددی محاسبه می‌شود. در این روش به ازای همه‌ی مقادیر درآمد و هزینه شهری کشور و استان خراسان جنوبی در سال ۱۳۹۵، مقادیر $(u, L(u))$ را محاسبه کرده و سپس مدل‌های پارامتری جدول ۱ را به عنوان مدل رگرسیونی در نظر می‌گیریم. به این

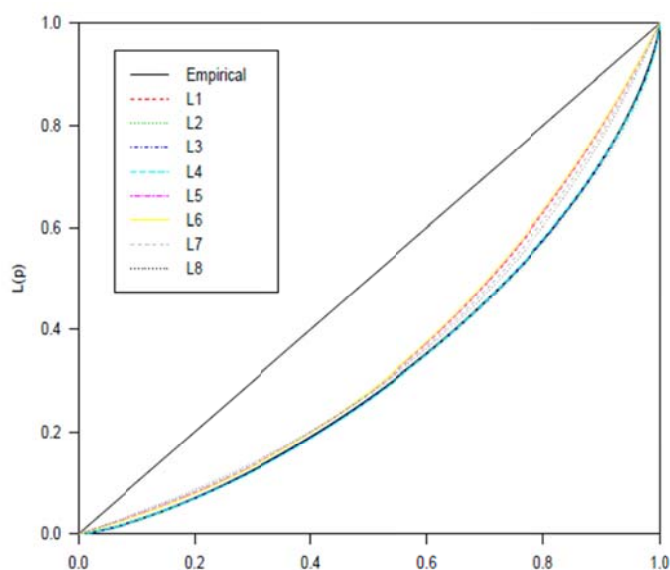
ترتیب که در این مدل‌ها مقدار تجربی لورنتس $L(u)$ به عنوان متغیر پاسخ و u به عنوان متغیر توضیحی در نظر گرفته می‌شود. در هر مدل ضریب‌های رگرسیونی به روش کم‌ترین توان دوم برآورد می‌شوند. برای برازش یک مدل رگرسیون ناخطی به روش کم‌ترین توان دوم در نرم‌افزار R از فرمان $nls()$ استفاده کرده‌ایم.

در جدول ۲، برآورد پارامترهای صورت‌های تابعی لورنتس را به همراه مجموع توان‌های دوم مانده‌های مدل‌های معرفی شده در جدول ۱، برای داده‌های درآمد و هزینه شهری کشور و استان خراسان جنوبی در سال ۱۳۹۵ ارائه شده است. شکل ۱ منحنی لورنتس تجربی و صورت‌های تابعی برازش داده به داده‌های درآمد شهری کشور در سال ۱۳۹۵ را نشان می‌دهد. در شکل ۲، هر صورت پارامتری به‌طور مجزا با منحنی لورنتس تجربی داده‌های بالا مقایسه شده‌اند. با توجه به این شکل‌ها می‌توان مدل مناسب را به صورت بصری یافت. از طرفی با توجه به اطلاعات جدول ۲ و مقایسه‌ی توان دوم مانده‌ها برای توابع پارامتری مختلف، ملاحظه می‌شود:

۱. برای داده‌های درآمد شهری کشور در سال ۱۳۹۵، توابع لورنتس متناظر سطر دوم، چهارم و سوم جدول یعنی مدل‌های اورتگا و همکاران [۱۲]، کاکوانی [۸] و راش [۱۴] به ترتیب با مجموع توان دوم مانده‌های ۰/۰۱۷۴، ۰/۰۲۰۴۵ و ۰/۰۲۶۰۶ بهترین مدل‌های برازش داده شده، هستند (این صورت‌های تابعی در جدول با علامت * مشخص شده‌اند).
۲. برای داده‌های هزینه‌ی شهری کشور سال ۱۳۹۵، منحنی‌های لورنتس $L_۳$ ، $L_۴$ و $L_۵$ به ترتیب با مجموع توان دوم مانده‌های ۰/۰۰۳۱، ۰/۰۱۲ و ۰/۰۶۵ مناسب‌ترین مدل‌های برازش داده، هستند.
۳. برای داده‌های درآمد شهری خراسان جنوبی در سال ۱۳۹۵، مدل‌های لورنتس $L_۵$ ، $L_۴$ و $L_۳$ به ترتیب با مجموع توان دوم مانده ۰/۰۰۲۳، ۰/۰۰۲۵ و ۰/۰۰۳۴ مناسب‌ترین مدل‌ها می‌باشند.
۴. برای داده‌های هزینه‌ی شهری خراسان جنوبی در سال ۱۳۹۵، به ترتیب با مجموع توان دوم مانده ۰/۰۰۰۷۸، ۰/۰۰۱۳ و ۰/۰۰۲۶ مدل‌های لورنتس $L_۳$ ، $L_۴$ و $L_۵$ در انتخاب مناسب‌ترین مدل دارای اولویت هستند.

جدول ۲- برخی مدل‌های پارامتری لورنتس همراه با منبع آن‌ها.

کد	منبع	$L(u)$
L_1	چوتیکا پانیچ [۴]	$L_1(u; k) = \frac{e^{ku-1}}{e^k - 1}, k \geq 0$
L_2	اورنگا و همکاران [۱۲]	$L_2(u; \alpha, k) = u^\alpha \left[1 - (1-u)^k \right], \alpha \geq 0, 0 < k \leq 1$
L_3	راش [۱۴]	$L_3(u; k, \gamma) = \left[1 - (1-u)^k \right]^\gamma, 0 < k \leq 1, \gamma \geq 1$
L_4	سارابیا و همکاران [۱۶]	$L_4(u; \alpha) = \left(\Phi(\Phi^{-1}(u) - \alpha) \right)^\beta$
L_5	کاکوانی [۸]	$L_5(u; \alpha, \beta, \delta) = u - \alpha u^\delta (1-u)^\beta, \alpha > 0, 0 < \beta, \delta \leq 1$
L_6	کاکوانی و پودر [۹]	$L_6(u; \alpha, \beta) = u^\alpha e^{-\beta(1-u)}, \alpha \geq 1, \beta > 0$
L_7	گوپتا [۷]	$L_7(u; \alpha) = u\alpha^{(1-u)}, \alpha > 0$
L_8	آرنولد [۳]	$L_8(u; \alpha, \beta) = \frac{u \left[1 + (\alpha - 1)u \right]}{1 + (\alpha - 1)u + \beta(1-u)}, \alpha, \beta > 0, \alpha - \beta > 0, \alpha - \beta < 1$
L_9	روح [۱۵]	$L_9(u; \alpha) = \frac{(1-\alpha)u}{1-\alpha u}, 0 \leq \alpha < 1$
L_{10}	وانگ و همکاران [۲۰]	$L_{10}(u; \alpha, \beta) = 1 - (1-u)^\alpha e^{\beta u}$



شکل ۱- منحنی لورنتس تجربی و تابع‌های پارامتری برازش داده‌شده به داده‌های درآمد شهری کل کشور در سال ۱۳۹۵.

با توجه به نتایج حاصل برای داده‌های درآمد شهری کشور در سال ۱۳۹۵، تابع چنک این داده‌ها برای مدل اورتگا و همکاران [۱۲] و راش [۱۴] به ترتیب

$$Q(u) = u^{\alpha-1}(1-u)^{k-1}[\alpha(1-u)^{1-k} + (\alpha+k)u - \alpha]$$

و

$$Q(u) = \gamma k(1-u)^{k-1}[1 - (1-u)^k]^{\gamma-1} \text{ است.}$$

روش‌های بیشینه درستنمایی و روش صدک اصلی از دیگر روش‌های برآورد پارامترهای صورت‌های تابعی لورنتس هستند. مجیری و همکاران [۲] برای مقایسه‌ی این سه روش برآورد ذکر شده برای صورت‌های تابعی از معیار اندازه‌ی اطلاع عدم صحت که توسط تایل [۱۸] معرفی شد استفاده کرده و نشان دادند که روش کم‌ترین توان دوم با داشتن کم‌ترین مقدار اندازه‌ی اطلاع عدم صحت در همه‌ی صورت‌های تابعی لورنتس بهترین روش برآورد برای نمونه‌های مورد استفاده‌ی هزینه و درآمد خانوار در سال ۱۳۹۵ باشد. لذا در این مقاله به برآورد پارامترهای صورت‌های پارامتری لورنتس به روش کم‌ترین توان دوم اکتفا کرده و خواننده‌ی علاقه‌مند می‌تواند به مجیری و همکاران [۲] مراجعه کند.

گاستورث [۶] کران پایین زیر را برای بررسی درستی برآورد ضریب جینی معرفی کرد:

$$G \geq 1 - \sum_{i=1}^n (u_i - u_{i-1})(L(u_i) + L(u_{i-1})),$$

که در آن $u_0 = L(u_0) = 0$ است.

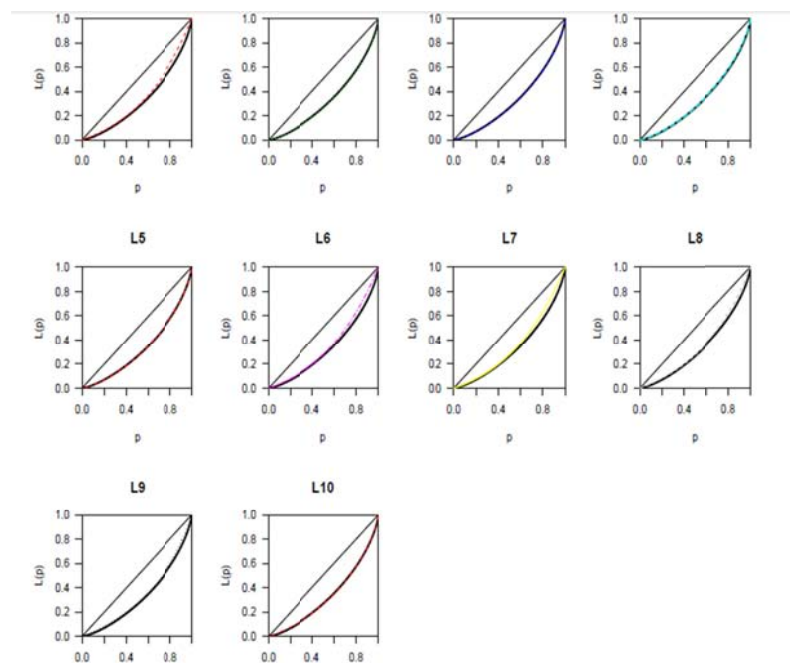
مقدار این کران برای داده‌های هزینه و درآمد خانوار شهری کشور و استان خراسان جنوبی در سال ۱۳۹۵ محاسبه شده است که در جدول ۳ نشان داده شده است. ضریب جینی برآورده‌شده صورت‌های تابعی در جدول ۴ ارائه شده است. در این جدول ضریب‌های جینی که در کران گاستورث صدق می‌کند، با علامت * مشخص شده‌اند. همان‌طور که ملاحظه می‌شود ضریب جینی مدل‌های مناسب داده‌ها، یعنی L_2 ، L_3 و L_5 در کران پایین گاستورث صدق می‌کنند. در بخش درآمدهای شهری ضریب جینی مدل L_1 بزرگ‌تر از کران گاستورث است. از طرفی مقایسه‌ی ضریب جینی مدل‌های برازش داده‌شده با ضریب جینی داده‌ها حکایت از نزدیک بودن این مقادیر برای مدل‌های مناسب‌تر نسبت به سایر مدل‌ها دارد.

جدول ۳- برآورد پارامترهای صورت‌های تابعی لورنتس برای داده‌های درآمد و هزینه خانوار شهری کل کشور و استان خراسان جنوبی در سال ۱۳۹۵ به روش کم‌ترین توان‌های دوم.

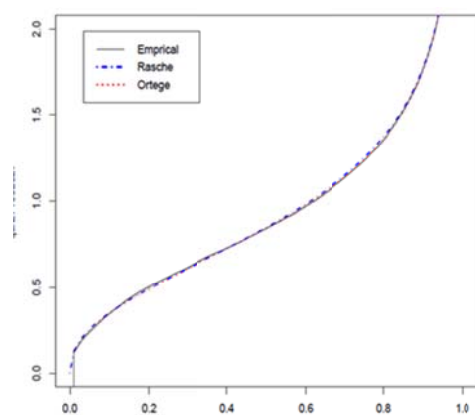
درآمد شهری				
منحنی لورنتس	کشور	خراسان جنوبی		
پارامتری	پارامتر	مجموع توان دوم مانده‌ها	پارامتر	مجموع توان دوم مانده‌ها
L_1	$k = ۱۹۳۴۴$	۱/۲۹۵	$k = ۱۷۳۶۷$	۰/۵۰۳۵
L_2^*	$k = ۰/۶۴۸۳, \alpha = ۰/۴۴۶۷$	۰/۱۷۴	$k = ۰/۶۸۳۹, \alpha = ۰/۳۹۳۷$	۰/۰۲۵۵
L_3^*	$k = ۰/۷۳۲۵, \gamma = ۱/۴۳۲۱$	۰/۲۶۰۶	$k = ۰/۷۵۵۰, \gamma = ۱/۳۸۲۷$	۰/۰۳۳۹۲
L_4^*	$\alpha = ۱/۰۸۶۴, \beta = ۱/۰۹۴۵$	۰/۱۲۲۶	$\alpha = ۰/۰۴۶۰۹, \beta = ۱/۰۸۸۸$	۰/۰۸۳۵۳
L_5^*	$\alpha = ۰/۶۴۳۴, \beta = ۰/۵۶۴۶, \delta = ۰/۸۹۳۱$	۰/۲۰۴۵	$\alpha = ۰/۵۷۱۳, \beta = ۰/۵۶۲۵, \delta = ۰/۸۵۹۴$	۰/۰۲۲۶۸
L_6	$\alpha = ۱/۰۸۶۴, \beta = ۱/۰۵۵۷$	۱/۱۸۶	$\alpha = ۱/۱۱۹۸, \beta = ۰/۰۸۶۳۴$	۰/۰۴۲۲
L_7	$\alpha = ۳/۲۶۹۹$	۱/۲۵۳	$\alpha = ۲/۸۴۱$	۰/۰۴۷۱۳
L_8	$\alpha = ۱/۸۶۵۴, \beta = ۲/۳۲۵۷$	۱/۱۲	$\alpha = ۱/۸۹۲۶, \beta = ۱/۹۷۷۳$	۰/۰۴۳۶۶
L_9	$\alpha = ۱/۶۰۴۹$	۲/۱۹۱	$\alpha = ۱/۷۱۱۵$	۰/۰۷۶۳۴
L_{10}	$\alpha = ۰/۷۸۷۸, \beta = ۰/۴۷۶۷$	۱/۰۶۹	$\alpha = ۰/۸۰۲۶, \beta = ۰/۴۴۸۳$	۰/۰۴۴۹۳
هزینه شهری				
منحنی لورنتس	کشور	خراسان جنوبی		
پارامتری	پارامتر	مجموع توان دوم مانده‌ها	پارامتری	پارامتر
L_1	$k = ۱۹۳۴۵$	۱/۳۵۲	$k = ۱۹۴۳۴$	۰/۴۱۳۶
L_2^*	$k - ۰/۵۹۵۲, \alpha - ۰/۳۶۹۷$	۰/۱۲۱۵	$k - ۰/۶۲۰۸, \alpha - ۰/۴۱۴۱$	۰/۰۱۳۱۱
L_3^*	$k = ۰/۶۷۲۸, \gamma = ۱/۳۵۲۹$	۰/۰۳۱۴۵	$k = ۰/۷۰۲۸, \gamma = ۱/۳۹۶۴$	۰/۰۰۷۸۰۹
L_4^*	$\alpha = ۰/۶۵۱۱, \beta = ۰/۹۷۰۵$	۰/۰۶۶۵۵	$\alpha = ۰/۵۹۰۵, \beta = ۱/۰۲۸۴$	۰/۰۲۶۳۲
L_5^*	$\alpha - ۰/۶۵۹۵, \beta - ۵۴۶۰, \delta - ۰/۹۳۷۴$	۰/۰۶۴۸۹	$\alpha - ۰/۶۷۵۲, \beta - ۰/۵۹۴۶, \delta - ۰/۹۳۵۷$	۰/۰۴۲۲۶
L_6	$\alpha = ۰/۹۲۵۹, \beta = ۱/۲۷۹۵$	۱/۵۳۸	$\alpha = ۰/۹۸۹۴, \beta = ۱/۲۰۶۱$	۰/۰۴۵۷۳
L_7	$\alpha = ۳/۲۱۷۱$	۱/۵۹۱	$\alpha = ۳/۲۸۸$	۰/۰۴۵۷۷
L_8	$\alpha = ۱/۲۸۲, \beta = ۱/۸۶۱$	۱/۰۴۹	$\alpha = ۱/۵۰۰۵, \beta = ۲/۰۶۸۳$	۰/۰۳۵۴
L_9	$\alpha = ۱/۶۰۸۴$	۱/۲۳۶	$\alpha = ۱/۵۹۷۹$	۰/۰۵۲۱۴
L_{10}	$\alpha = ۰/۷۳۶۳, \beta = ۰/۴۱۲۴$	۰/۵۵۴۰	$\alpha = ۰/۷۸۷۵, \beta = ۰/۴۷۸۹$	۰/۱۹۸۷

جدول ۴- کران پایین گاستورث ضریب جینی برای داده‌های هزینه و درآمد شهری کشور و استان خراسان جنوبی در سال ۱۳۹۵.

هزینه‌ی استان	درآمد استان	هزینه‌ی شهری کشور	درآمد شهری کشور
۰/۳۴	۰/۳۱	۰/۳۵	۰/۳۴



شکل ۲- منحنی لورنتس تجربی و توابع پارامتری برازش داده‌شده به داده‌های درآمد کل کشور در سال ۱۳۹۵.



شکل ۳- نمودار تابع چندک داده‌های درآمد شهری کشور و تابع چندک متناظر دو مدل اورتگا و همکاران [۱۲] و راش [۱۴].

جدول ۵- ضریب جینی برای داده‌های هزینه و درآمد شهری کشور و استان خراسان جنوبی در سال ۱۳۹۵ برای مدل‌های معرفی‌شده در جدول ۱.

صورت پارامتری	هزینه‌ی شهری کل کشور	درآمد شهری کل کشور	هزینه‌ی استان خراسان جنوبی	درآمد استان خراسان جنوبی
کران پایین گاستورث ضریب جینی	۰٫۳۵	۰٫۳۴	۰٫۳۴	۰٫۳۱
L_1	۰٫۳۰۰۵	۰٫۳۰۳۹	۰٫۳۰۵۲	۰٫۲۷۵۹
L_2	۰٫۳۵۹۹*	۰٫۳۴۶۴*	۰٫۳۵۴۷*	۰٫۳۱۲۴*
L_3	۰٫۳۵۳۶*	۰٫۳۴۱۲*	۰٫۳۴۹۴*	۰٫۳۰۸۷
L_4	۰٫۳۳۹۷	۰٫۳۳۰۴	۰٫۳۳۷۸	۰٫۲۹۸۶
L_5	۰٫۳۵۲۷*	۰٫۳۴۶۳*	۰٫۳۴۱۹*	۰٫۳۱۶۰*
L_6	۰٫۲۹۹۱	۰٫۲۹۹۵	۰٫۳۰۲۲	۰٫۲۷۱۰
L_7	۰٫۲۹۷۹	۰٫۳۰۱۰	۰٫۳۰۲۰	۰٫۲۷۳۳
L_8	۰٫۳۰۸۷۵	۰٫۳۰۳۶	۰٫۳۰۹۳	۰٫۲۷۳۴
L_9	۰٫۳۱۴۲	۰٫۳۱۵۳	۰٫۳۱۷۵	۰٫۲۸۵۳
L_{10}	۰٫۳۴۶۴	۰٫۳۴۰۸*	۰٫۳۳۸۱	۰٫۳۱۰۰*

۵- بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله، به معرفی منحنی‌های لورنتس پارامتری دلایل تعریف آن‌ها و بیان برخی از مشخصه‌های آن‌ها پرداختیم. شرط‌هایی که برای برقراری برخی از ترتیب‌های تصادفی برای متغیرهای نظیر منحنی‌های لورنتس تغییر شکل یافته وجود دارد را جستجو نمودیم. در نهایت برخی از مهم‌ترین مدل‌های پارامتری معرفی‌شده را به داده‌های هزینه و درآمد خانوار سال ۱۳۹۵ کل کشور و استان خراسان جنوبی برازش دادیم. در این بخش پارامترهای صورت‌های تابعی لورنتس را با روش کم‌ترین توان دوم برآورد نمودیم. با توجه به نتایج ذکرشده برازنده‌ترین مدل برای داده‌های درآمد و هزینه شهری کشور و استان خراسان جنوبی به ترتیب مدل مدل اورتگا و همکاران [۱۲] و راش [۱۴] هستند. از طرفی مقایسه‌ی ضریب جینی این مدل‌ها حکایت از کوچک‌تر بودن از کران گاستورث و هم‌چنین نزدیکی آن به ضریب جینی واقعی داده‌ها دارد. با استفاده از صورت پارامتری مناسب داده‌ها تابع چندک مناسب با آن‌ها را نیز می‌توانیم بیابیم.

توضیحات

۱. در این مقاله تعریف‌های هزینه، درآمد، خانوار مطابق با تعریف طرح آمارگیری هزینه و درآمد خانوارهای شهری و روستایی مرکز آمار ایران است.
۲. نتایج حاصل از این تحقیقات با اعداد ذکرشده توسط برخی ارگان‌ها مانند مرکز آمار ایران مطابقت ندارد که دلیل عدم تطابق، تفاوت در محاسبات است. در مرکز آمار ایران محاسبات به صورت وزنی انجام می‌شود در حالی که محاسبات در این مقاله بدون وزن انجام شده است.
۳. لازم به ذکر است که نتایج به‌دست آمده در این مقاله، فقط برای یک نمونه انجام شده است و برای داده‌های دیگر ممکن است نتیجه تغییر کند. لذا درباره‌ی عمل‌کرد صورت‌های تابعی لورنتس، با توجه به نتایج مقاله، نمی‌توان قضاوت کلی کرد.

مرجع‌ها

- [۱] بهدانی؛ زهرا، واقعی؛ یدا...، محتشمی برزادران؛ غلامرضا و صادق‌پورگیلده؛ بهرام (۱۳۹۴). مطالعه‌ی مقایسه‌ای شاخص‌های توزیع درآمد استان خراسان جنوبی با کشور طی سال‌های ۱۳۸۴ تا ۱۳۹۳. بررسی‌های آمار رسمی ایران. شماره‌ی ۸۷، ۱۶۱-۱۸۱.
- [۲] مجیری؛ آزاده، محتشمی برزادران؛ غلامرضا و واقعی؛ یدا... (۱۳۸۷). برآورد منحنی لورنتس و ضریب جینی به روش پارامتری. بررسی‌های آمار رسمی ایران - گزیده مطالب آماری، ۱۹.
- [3] Arnold, B.C. (1986). A Class of Hyperbolic Lorenz Curves. *Sankhyā B*, **48**, 427-436.
- [4] Chotikapanich, D. (1993). A Comparison of Alternative Functional Forms for the Lorenz Curve. *Economics Letters*, **41**, 129-138.
- [5] Datt, G. (1998). Computational Tools for Poverty Measurement and Analysis. International Food Policy Research Institute, Washington.
- [6] Gastwirth, J.L. (1971). A General Definition of the Lorenz Curve.

Econometrica: Journal of the Econometric Society, 1037–1039.

- [7] Gupta, M.R. (1984). Functional Form for Estimating the Lorenz Curve. *Econometrica*, **52**, 1313–1314.
- [8] Kakwani, N. (1980). On a Class of Poverty Measures. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 437–446.
- [9] Kakwani, N.C. and Podder, N. (1973). On the Estimation of Lorenz Curves from Grouped Observations. *International Economic Review*, 278–292.
- [10] Kakwani, N.C. and Podder, N. (1976). Efficient Estimation of the Lorenz Curve and Associated Inequality Measures from Grouped Observations. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 137–148.
- [11] Lorenz, M.O. (1905). Methods of Measuring the Concentration of Wealth. *Publications of the American statistical association*, **9**, 209–219.
- [12] Ortega, P., Martín, A., Fernández, A., Ladoux, M. and García, A. (1991). A New Functional Form for Estimating Lorenz Curves. *Review of Income and Wealth*, **37**, 447–452.
- [13] Pakes, A.G. (1995). On Income Distributions and Their Lorenz Curves. Department of Mathematics, University of Western Australia.
- [14] Rasche, R.H. (1980). Functional Forms for Estimating the Lorenz Curve Comment. *Econometrica*, **48**, 1061–1062.
- [15] Rohde, N. (2009). An Alternative Functional Form for Estimating the Lorenz Curve. *Economics Letters*, **105**, 61–63.
- [16] Sarabia, J.M., Castillo, E. and Slottje, D.J. (1999). An Ordered Family of Lorenz Curves. *Journal of Econometrics*, **91**, 43–60.
- [17] Sordo, M.A., Navarro, J. and Sarabia, J.M. (2014). Distorted

Lorenzcurves: Models and Comparisons. Social Choice and Welfare, 42, 761-780.

- [18] Theil, H. (1979). The Measurement of Inequality by Components of Income. Economics Letters, 2, 197-199.
- [19] Thompson, W.A.Jr. (1976). Fisherman's Luck. Biometrics, 32, 265-271.
- [20] Wang, Z., Ng, Y.K. and Smyth, R. (2011). A General Method for Creating Lorenz Curves. Review of Income and Wealth, 57, 561-582.

زهره بهدانی

دانشجوی دکتری آمار

مشهد، دانشگاه فردوسی مشهد، گروه آمار.

رایانشانی: zbehdani@yahoo.com

غلامرضا محتشمی برزادران

دکتری آمار

مشهد، دانشگاه فردوسی مشهد، گروه آمار.

رایانشانی: grmohtashami@um.ac.ir

بهرام صادق‌پور گیلده

دکتری آمار

مشهد، دانشگاه فردوسی مشهد، گروه آمار.

رایانشانی: sadehpour@um.ac.ir