مجله‌ی بررسی‌های آمار رسمی ایران
سال ۲۸، شماره‌ی ۱، بهار و تابستان ۱۳۹۶، صص ۱ – ۱۱

رده‌ی جدیدی از منحنی‌های لورنتس برای هزینه‌ی خانوارهای شهری ایران

علی خسروی طناک[†] و غلامرضا محتشمی برزادران[‡,*]

[†] دانشگاه ولایت
[‡] دانشگاه فردوسی مشهد

چکیده: منحنی لورنتس یکی از مهم‌ترین ابزارهای گرافیکی برای توصیف میزان نابرابری در توزیع درامد، ثروت و دیگر شاخص‌های رفاهی در جامعه‌ها است. از این‌رو براورد آن همواره مورد توجه پژوهشگران علوم اجتماعی و اقتصادی بوده است. تاکنون با دیدگاه‌های مختلف، مدل‌های بسیاری برای براورد منحنی لورنتس پیشنهاد شده‌اند. خسروی طناک با استفاده از تابع سهم با آنتروپی تسالیس بیشینه و بر اساس قیدی بر شاخص جینی تعمیم‌یافته دو رده‌ی جدید از منحنی‌های لورنتس را معرفی کرد و نشان داد که یکی از آن‌ها داده‌های تحت بررسی که مربوط به سه کشور آسیای شرقی بود را بهتر مدل‌بندی می‌کند. در این مقاله برازش این مدل‌ها به داده‌های هزینه خانوارهای شهری ایران در سال‌های ۱۳۸۸، ۱۳۹۰ و ۱۳۹۲ مورد بررسی قرار می‌دهیم.

واژگان کلیدی: تابع سهم؛ توزیع درامد؛ توزیع هزینه؛ شاخص جینی؛ منحنی لورنتس.

۱– مقدمه

پراکندگی توزیع درامد در یک جامعه به نابرابری‌های درامدی معروف است که تحلیل آن یکی از مباحث مهم در اقتصاد است. اقتصاددانان همواره به‌دنبال یافتن شاخصی بوده‌اند که با دقت میزان نابرابری را در جامعه نشان دهد. راه‌های مختلفی برای اندازه‌گیری نابرابری وجود دارد. یکی از معروف‌ترین ابزار برای اندازه‌گیری نابرابری در

---

* نویسنده‌ی عهده‌دار مکاتبات
دریافت: ۱۳۹۶/۱/۳۰، پذیرش: ۱۳۹۷/۴/۱۶

توزیع درامد توسط لورنتس [۱۱] معرفی شد. وی از روش گرافیکی و رسم نمودار برای بررسی رابطه‌ی بین گروه‌های جمعیتی و سهم درامد آن‌ها استفاده کرد. این نمودار که منحنی لورنتس نامیده می‌شود سهم درامد واحدهای دریافت‌کننده از کل درامد جامعه را نشان می‌دهد. فرض کنید $x_۱, x_۲, \dots, x_n$ درامد n واحد دریافت‌کننده (که ممکن است افراد یا خانوارها باشند) باشد. اگر درامدها را از کوچک به بزرگ مرتب کنیم و مرتب شده آن‌ها را با $x_{(۱)}, x_{(۲)}, \dots, x_{(n)}$ نشان دهیم، آن‌گاه منحنی لورنتس عبارت است از

$$L\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{\sum_{i=۱}^{k} x_{(i)}}{\sum_{i=۱}^{n} x_{(i)}}, k = ۱, \dots, n$$

و $L(۰) = ۰$. اگر زوج نقطه‌های $\left(\frac{k}{n}, L\left(\frac{k}{n}\right)\right)$ را برای مقدارهای مختلف k در یک نمودار رسم کنیم منحنی لورنتس به‌دست می‌آید.

گستورث [۶] منحنی لورنتس را برای متغیرهای تصادفی پیوسته معرفی کرد. فرض کنید X متغیر تصادفی درامد افراد در یک جامعه با تابع توزیع F و میانگین مثبت μ باشد. منحنی لورنتس X به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$L(p) = \frac{۱}{\mu}\int_۰^p F^{-۱}(x)dx, ۰ \le p \le ۱ \qquad (۱)$$

که در آن $F^{-۱} = inf\{t: F(t) \ge x\}$ در واقع (p) نسبتی از درامد کل است که $۱۰۰p$ درصد کم‌درامد جامعه دریافت می‌کنند. اگر برابری کامل در توزیع درامد وجود داشته باشد یعنی در صورتی که به هر $۱۰۰p$ درصد کم‌درامد جامعه $۱۰۰p$ درصد کل درامد تعلق بگیرد، آن‌گاه $L(p) = p$. در این صورت منحنی لورنتس بر نیمساز ربع اول که خط برابری نام دارد منطبق می‌شود. بنا بر رابطه (۱)، منحنی لورنتس دارای خواصی هم‌چون پیوستگی، غیرنزولی و محدب بودن است. پیکس [۱۳] شرایط لازم و کافی برای این‌که تابع L یک منحنی لورنتس باشد را در قالب قضیه زیر بیان کرد.

قضیه ۱ (پیکس، [۱۳]) فرض کنید $L(p)$ بر بازه‌ی $[۰,۱]$. پیوسته و مشتق دوم آن $L''(p)$ باشد. تابع $L(p)$ یک منحنی لورنتس است اگر و تنها اگر

$$L(۰)=۰, L(۱)=۱ \quad L(۰^{+})\geq ۰, \quad L''(p)\geq ۰, p\in(۰,۱)$$

منحنی لورنتس مبنای تعریف بسیاری از اندازه‌های نابرابری درامد است که مشهورترین و متداول‌ترین آن‌ها شاخص جینی است. این شاخص اولین بار توسط جینی بر مبنای منحنی لورنتس تعریف شد [۷]. بر اساس تعریف وی اگر Xمتغیر تصادفی نامنفی با منحنی لورنتس $L(p)$ باشد آنگاه شاخص جینی X به صورت دو برابر سطح محصور بین $L(p)$ و خط برابری تعریف می‌شود:

$$G=۲\int_{۰}^{۱}[p-L(p)]dp \tag{۲}$$

با توجه به تعریف، شاخص جینی عددی بین صفر و یک هست. هر چه منحنی لورنتس از خط برابری فاصله‌ی بیش‌تری داشته باشد یا هر چه نابرابری در توزیع درامد بیش‌تر باشد، این شاخص بزرگ‌تر خواهد بود.

این مقاله در سه بخش تنظیم شده است. در بخش دوم، مدل‌های معروفی که تاکنون معرفی شده و همچنین مدل‌های پیش‌نهادی خسروی طناک [۲] برای منحنی لورنتس را بیان می‌کنیم. در بخش سوم این مدل‌ها را به داده‌های هزینه خانوارهای شهری در سال‌های ۱۳۸۸، ۱۳۹۰ و ۱۳۹۲ برازش داده و نتایج نیکویی برازش مدل‌ها را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۲- مدل‌های پارامتری منحنی لورنتس

پارامتری کردن منحنی لورنتس یک روش مفید برای نشان دادن نحوه‌ی توزیع درامد در یک جامعه است. در صورت انتخاب یک مدل پارامتری مناسب برای منحنی لورنتس سطح نابرابری درامد و سهم گروه‌های مختلف درامدی به‌نحو بهتری قابل توصیف است. در دهه‌های اخیر شمار زیادی از مدل‌های پارامتری توسط پژوهشگران مختلف برای مدل‌بندی منحنی لورنتس بر اساس دیدگاه‌های متفاوت پیش‌نهاد

شده‌اند. برخی محققین مستقیماً خانواده‌ای از منحنی‌های لورنتس به‌طوری‌که در شرایط قضیه ۱ صدق کنند را معرفی کردند. در جدول ۱ معروف‌ترین این مدل‌ها که در برازش به منحنی‌های لورنتس تجربی موفق عمل کرده‌اند، آمده است. مجیری و همکاران (۱۳۸۷) از جمله مطالعاتی است که در زمینه براورد منحنی لورنتس برای داده‌های هزینه خانوارهای ایران با استفاده از این مدل‌ها صورت گرفته است [۳].

خسروی طناک [۳] با استفاده از اصل آنتروپی تسالیس بیشینه و بر اساس قیدی بر شاخص جینی تعمیم‌یافته، دو مدل پارامتری جدید برای منحنی لورنتس معرفی کرد که عبارتند از:

$$L_1(p) = 1 - \frac{(1-p)\,{}_2F_1\left[\frac{1}{v-1}, -\frac{1}{\alpha-1}; \frac{1}{v-1}+1; \frac{-(1-p)^{v-1}}{\beta}\right]}{{}_2F_1\left[\frac{1}{v-1}, -\frac{1}{\alpha-1}; \frac{1}{v-1}+1; \frac{-1}{\beta}\right]},$$
$$0 < \alpha < 1, \beta > 0, v > 1,$$

و

$$L_2(p) = \frac{\beta_{1-\frac{(1-p)^{v-1}}{\beta}}\left(1+\frac{1}{\alpha-1}, \frac{1}{v-1}\right) - \beta_{1-\frac{1}{\beta}}\left(1+\frac{1}{\alpha-1}, \frac{1}{v-1}\right)}{\beta\left(1+\frac{1}{\alpha-1}, \frac{1}{v-1}\right) - \beta_{1-\frac{1}{\beta}}\left(1+\frac{1}{\alpha-1}, \frac{1}{v-1}\right)},$$
$$\alpha > 1, \beta \geq 1, v > 1,$$

که در آن‌ها $\beta(0,0)$ تابع بتای کامل، $\beta_t(0,0)$ تابع بتای ناقص و

$${}_mF_n\left(k_1, k_2, \ldots, k_\mathrm{m}; l_1, l_2 \ldots, l_\mathrm{n}; x\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(k_1)_i \ldots (k_m)_i x^i}{(l_1)_i \ldots (k_m)_i x^i}$$

جدول ۱- برخی مدل‌های پارامتری منحنی لورنتس.

پیشنهاددهندگان	$L(p)$
کاکوانی و پودر [۹]	$p^{\alpha}e^{-\beta(1-p)}, \alpha \geq 1, \beta > 0$
راسچ و همکاران [۱۲]	$\left[1-(1-p)^{\alpha}\right]^{\beta}, 0 \leq \alpha \leq 1, \beta \geq 1$
کاکوانی [۹]	$p-\alpha p^{\beta}\left(1-p\right)^{\gamma}, \alpha > 0, 0 < \beta \leq 1, 0 < \gamma \leq 1$
گوپتا [۷]	$p\alpha^{p-1}, \alpha > 0$
آرنولد [۴]	$\frac{p\left[1+(\alpha-1)p\right]}{1+\left(\alpha-1\right)+\beta(1-p)}, \alpha, \beta > 0, -\beta < 1$
اورتەگا و همکاران [۱۱]	$p^{\gamma}\left[1-(1-p)^{\alpha}\right], \gamma \geq 0, 0 < \alpha \leq 1$
چوتیکاپانیچ [۵]	$\frac{e^{\alpha p-1}}{e^{\alpha}-1}, \alpha > 0$
سارابیا و همکاران [۱۴]	$p^{\gamma}\left[1-(1-p)^{\alpha}\right]^{\beta}, \gamma \geq 0, 0 < \alpha \leq 1, \beta \geq 1$
روید [۱۳]	$\frac{p(\alpha-1)}{\alpha-p}, \alpha > 1$

تابع فوق هندسی است که $(k)_i = (k)\left(k+1\right)...\left(k+i-1\right)$ این مدل‌ها در واقع به‌صورتی به‌دست آمدند که ۱: در شرایط قضیه ۱ صدق کنند و ۲: جواب مسئله بیشینه‌سازی آنتروپی تسالیس [۱۷] تحت قید شاخص جینی تعمیم‌یافته [۹] یعنی مسئله زیر باشند.

$$\max\left\{\frac{1}{1-\alpha}\int_0^1 s^{\alpha}(p)dp\right\}$$

به‌طوری‌که

$$\int_0^1 s(p)dp = 1$$

و

$$\int_0^1 \vartheta(1-p)^{\vartheta-1}s(p)dp = c$$

که در آن $s(p) = L'(p)$ تابع سهم درامد نام دارد.

۳- برازش مدل به داده‌ها

در کشورهای در حال توسعه به‌طور معمول از توزیع هزینه به‌جای توزیع درامد استفاده می‌شود. ابونوری و ایرجی [۱] دلایل متعددی برای آن برشمردند که در ادامه به چند مورد آن اشاره می‌شود:

۱- در برخی از کشورها اطلاعات آماری مربوط به درامد افراد یا خانوارها گرداوری نشده، تنها اطلاعات مربوط به هزینه‌های مصرفی گرداوری می‌شود.

۲- اکثر افراد، به‌ویژه در میان فقیرترین و ثروتمندترین گروه‌ها، تمایلی به فاش کردن مقدار درامد خود ندارند. دسته‌ی اول به‌سبب شرمندگی و دسته‌ی دوم به‌دلیل ترس از پرداخت مالیات، درامدهای خود را به‌ترتیب بیش‌تر و کم‌تر از مقدار واقعی ابراز می‌کنند.

۳- مسئله دیگر نوع و تعریف درامد است. برای مثال، در بخش کشاورزی بسیاری از کشورهای در حال توسعه، خودمصرفی رایج است. ارزیابی این درامدها بر اساس قیمت تمام شده‌ی کالاهای خودمصرفی، در مقایسه با درامدهای پولی حاصل از فروش آن‌ها موجب می‌شود تا رفاه حاصل از درامدهای جنسی در الگوی توزیع درامد، به‌طور نسبی کم براورد گردد. در حالی‌که در الگوی مصرف این حالت کم‌تر رخ می‌دهد.

۴- به‌دلیل تغییرات مداوم الگوی اشتغال و ناهنجاری‌های آن در کشورهای در حال توسعه، میزان درامد افراد جامعه دارای نوسان زیادی است، در حالی‌که الگوی مصرف ثبات و تداوم بیش‌تر و نوسان کم‌تری برخوردار بوده و تفسیر واقعی‌تری از سطح زندگی و رفاه جامعه را به‌دست می‌دهد و وجود نظام‌های حمایتی توزیع، اغلب در قالب کمک به هزینه‌های مصرفی است.

به‌منظور بررسی نیکویی برازش مدل‌های بیشینه آنتروپی تسالیس به داده‌های ایران، از داده‌های هزینه خانوارهای شهری ایران در سال‌های ۱۳۸۸، ۹۰ و ۹۲ استفاده کرده‌ایم. داده‌ها مشتمل بر اطلاعاتی از جمله هزینه بیش از ۱۸۰۰۰ خانوار شهری برای هر سال است که مربوط به طرح آمارگیری از هزینه و درامد خانوارها است و از «واحد اطلاع‌رسانی مرکز آمار ایران» دریافت شده است.

فرض می‌کنیم داده‌ها به n گروه تقسیم شده باشند و به‌صورت $(p_{۱},L_{۱}),(p_{۲},L_{۲}),\dots,(p_n,L_{\mathrm{n}})$ در اختیار باشند، که p_i نسبت تجمعی افراد گروه iام و L_i سهم تجمعی درامد یا منحنی لورنتس تجربی گروه iام است. اگر (p,Θ) منحنی لورنتس توزیع درامد جامعه باشد که در آن Θ بردار پارامترهای آن است، یک روش متداول برای براورد پارامترها استفاده از روش کم‌ترین توان‌های دوم خطا است. بنا بر این برای براورد پارامترهای مدل باید

$$\sum_{i=۱}^{n}[L_i-L(p_i;\Theta)]^{۲},$$

کمینه شود. با استفاده از نسخه ۱۳-۲/۰ بسته ineq نرم‌افزار R که به‌صورت برخط[۱] در دسترس است، منحنی لورنتس تجربی را برای دهک‌های هر سال به‌دست آورده‌ایم. مدل‌های $L_{۱}$ و $L_{۲}$ را و همچنین مدل‌های جدول ۱ به این داده‌ها برازش داده‌ایم. به‌منظور اندازه‌گیری میزان نیکویی برازش هر مدل از معیارهای میانگین توان‌های دوم خطا (MSE)، میانگین قدر مطلق خطا (MAE) و بیشینه قدر مطلق خطا (MAX) استفاده می‌کنیم. این معیارها به‌صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$MSE=\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}[L_i-L(p_i;\Theta)]^{۲},$$

$$MAE=\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}[L_i-L(p_i;\Theta)],$$

$$MAX=\max_{۱\le i\le n}|L_i-L(p_i;\Theta)|,$$

که در آن‌ها Θ بردار پارامترهای براورد شده است. برای محاسبه این معیارها به‌صورت عددی از نرم‌افزار R استفاده کرده‌ایم. نتیجه‌های براورد پارامترها و معیارهای نیکویی برازش هر مدل برای سال‌های ۱۳۸۸، ۹۰ و ۹۲ به ترتیب در جدول‌های ۲، ۳ و ۴ آمده است.

از جدول‌های ۲ تا ۴ نتیجه می‌گیریم مدل سه پارامتری بیشینه آنتروپی تسالیس $L_{۲}$ برازش بهتری به داده‌های هر سه سال و بر اساس هر سه معیار دارد. بعد از $L_{۲}$، مدل

کاکوانی [۹] داده‌ها را بهتر مدل‌بندی می‌کند. براورد شاخص جینی در این سال‌ها حاکی از کاهش نابرابری در سال ۱۳۹۰ نسبت به ۱۳۸۸ است.

جدول ۲- منحنی‌های لورنتس براورد شده برای سال ۱۳۸۸.

منحنی لورنتس	α	β	γ	Gini	MSE	MAE	MAX
چوتیکاپانیچ [۵]	۲٫۳۰۴۳	–	–	۰٫۳۵۴	۲٫۲۵E-۰۴	۰٫۰۱۲۳۹	۰٫۰۳۸۲۷
گوپتا [۷]	۴٫۴۰۹۴	–	–	۰٫۳۵۴	۳٫۲۳E-۰۴	۰٫۰۱۳۴۶	۰٫۰۴۲۸۰
روید [۱۳]	۱٫۵۰۱۹	–	–	۰٫۳۵۱	۱٫۵۲E-۰۴	۰٫۰۱۱۱۴	۰٫۰۱۷۷۱
کاکوانی و پودر [۹]	۱٫۰۰۰۰	۱٫۴۸۳۷	–	۰٫۳۵۵	۳٫۲۳E-۰۴	۰٫۰۱۳۴۶	۰٫۰۴۲۸۰
راسچ و همکاران [۱۲]	۰٫۷۲۲۵	۱٫۴۷۱۲	–	۰٫۳۶۲	۸٫۵۹E-۰۷	۰٫۰۰۰۸۳	۰٫۰۰۱۴۹
آرنولد [۴]	۱٫۱۶۸۴	۲٫۰۳۹۸	–	۰٫۳۵۳	۱٫۴۴E-۰۴	۰٫۰۱۰۱۱	۰٫۰۲۲۰۹
اورته‌گا و همکاران [۱۱]	۰٫۶۴۲۵	–	۰٫۴۹۹۳	۰٫۳۶۲	۲٫۲۳E-۰۷	۰٫۰۰۰۴۰	۰٫۰۰۰۸۳
کاکوانی [۸]	۰٫۶۸۱۳	۰٫۹۰۳۲	۰٫۵۶۷۸	۰٫۳۶۳	۲٫۱۰E-۰۷	۰٫۰۰۰۳۷	۰٫۰۰۰۹۷
سارابیا و همکاران [۱۴]	۰٫۶۴۳۶	۱٫۰۰۵۳	۰٫۴۹۳۶	۰٫۳۶۲	۲٫۲۳E-۰۷	۰٫۰۰۰۴۰	۰٫۰۰۰۸۴
L_1	۰٫۹۹۷۶	۱۷۳٫۳۵۴۸	$\upsilon =$ ۱٫۶۷۶۲	۰٫۳۵۳	۱٫۱۸E-۰۴	۰٫۰۰۹۶۸	۰٫۰۱۵۵۹
L_2	۳٫۱۱۹۸	۱٫۰۰۰۲	$\upsilon =$ ۲٫۴۳۷۵	۰٫۳۶۲	۴٫۷۹E-۰۸	۰٫۰۰۰۱۴	۰٫۰۰۰۵۰

جدول ۳- منحنی‌های لورنتس براورد شده برای سال ۱۳۹۰.

منحنی لورنتس	α	β	γ	Gini	MSE	MAE	MAX
چوتیکاپانیچ [۵]	۲٫۰۰۹۴	–	–	۰٫۳۱۴	۲٫۰۳E-۰۴	۰٫۰۱۱۲۰	۰٫۰۳۳۳۷
گوپتا [۷]	۳٫۵۱۸۴	–	–	۰٫۳۱۵	۲٫۵۴E-۰۴	۰٫۰۱۱۹۹	۰٫۰۳۷۲۱
روید [۱۳]	۱٫۶۱۳۲	–	–	۰٫۳۱۳	۱٫۲۴E-۰۴	۰٫۰۰۹۶۶	۰٫۰۱۷۴۱
کاکوانی و پودر [۹]	۱٫۰۰۰۰	۱٫۲۶۴۵	–	۰٫۳۱۶	۲٫۵۴E-۰۴	۰٫۰۱۲۲۳	۰٫۰۳۶۶۹
راسچ و همکاران [۱۲]	۰٫۷۴۲۷	۱٫۳۹۶۴	–	۰٫۳۲۲	۶٫۶۱E-۰۷	۰٫۰۰۰۶۸	۰٫۰۰۱۷۰
آرنولد [۴]	۱٫۰۹۴۴	۱٫۶۳۳۱	–	۰٫۳۱۳	۱٫۲۲E-۰۴	۰٫۰۰۹۳۴	۰٫۰۱۹۹۹
اورته‌گا و همکاران [۱۱]	۰٫۶۷۶۸	–	۰٫۴۱۵۴	۰٫۳۲۲	۳٫۸۹E-۰۷	۰٫۰۰۰۵۵	۰٫۰۰۱۱۵
کاکوانی [۸]	۰٫۶۰۵۵	۰٫۸۸۳۹	۰٫۵۸۱۶	۰٫۳۲۳	۳٫۴۸E-۰۷	۰٫۰۰۰۵۰	۰٫۰۰۰۹۸
سارابیا و همکاران [۱۴]	۰٫۶۸۶۴	۱٫۰۴۶۹	۰٫۳۶۵۷	۰٫۳۲۲	۳٫۸۰E-۰۷	۰٫۰۰۰۵۴	۰٫۰۰۱۲۳
L_1	۰٫۹۹۷۶	۲۰۴٫۰۹۳	$\upsilon =$ ۱٫۶۸۱۵	۰٫۳۱۴	۹٫۸۶-۰۵	۰٫۰۰۸۶۳	۰٫۰۱۴۴۱
L_2	۳٫۵۳۹۲	۱٫۰۰۱۹	$\upsilon =$ ۲٫۳۸۷۶	۰٫۳۲۲	۱٫۵۲E-۰۷	۰٫۰۰۰۳۴	۰٫۰۰۰۷۴

جدول ۴- منحنی‌های لورنتس براورد شده برای سال ۱۳۹۲.

منحنی لورنتس	α	β	γ	Gini	MSE	MAE	MAX
چوتیکاپانیچ [۵]	۱٫۰۱۵۱	–	–	۰٫۳۱۵	۲٫۸۵E-۰۴	۰٫۰۱۲۹۰	۰٫۰۳۹۷۲
گوپتا [۷]	۳٫۵۳۱۱	–	–	۰٫۳۱۵	۳٫۵۴E-۰۴	۰٫۰۱۴۱۲	۰٫۰۴۳۶۳
روید [۱۳]	۱٫۶۰۸۸	–	–	۰٫۳۱۴	۱٫۴۰E-۰۴	۰٫۰۱۰۰۹	۰٫۰۲۳۳۲
کاکوانی و پودر [۹]	۱٫۰۰۰۰	۱٫۲۶۱۶	–	۰٫۳۱۵	۳٫۵۴E-۰۴	۰٫۰۱۴۱۲	۰٫۰۴۳۶۳
راسچ و همکاران [۱۲]	۰٫۷۱۹۸	۱٫۳۵۴۲	–	۰٫۳۲۲	۱٫۷۳E-۰۷	۰٫۰۰۱۱۳	۰٫۰۰۲۵۵
آرنولد [۴]	۰٫۹۱۷۰	۱٫۶۳۹۴	–	۰٫۳۱۳	۱٫۳۸E-۰۴	۰٫۰۰۹۸۸	۰٫۰۲۰۷۱
اورته‌گا و همکاران [۱۱]	۰٫۶۵۷۱	–	۰٫۳۷۴۳	۰٫۳۲۳	۸٫۷۳E-۰۷	۰٫۰۰۰۷۴	۰٫۰۰۱۹۶
کاکوانی [۸]	۰٫۵۸۱۶	۰٫۸۷۴۸	۰٫۵۴۴۲	۰٫۳۲۴	۵٫۶۵E-۰۷	۰٫۰۰۰۶۵	۰٫۰۰۱۲۰
سارابیا و همکاران [۱۴]	۰٫۶۵۷۱	۱٫۰۰۰۰	۰٫۳۷۴۳	۰٫۳۲۳	۸٫۷۳E-۰۷	۰٫۰۰۰۷۴	۰٫۰۰۱۹۶
L_1	۰٫۹۹۷۶	۱۹۳٫۴۳۱	$\upsilon=$۱٫۵۹۱۱	۰٫۳۱۵	۱٫۰۴-۰۴	۰٫۰۰۸۷۹	۰٫۰۱۴۸۷
L_2	۳٫۹۹۲۲	۱٫۰۰۳۷	$\upsilon=$۲٫۴۳۹۷	۰٫۳۲۳	۱٫۲۰E-۰۷	۰٫۰۰۰۲۸	۰٫۰۰۰۶۰

۴- بحث و نتیجه‌گیری

تاکنون مدل‌های پارامتری بسیاری با ایده‌ها و روش‌های مختلف برای منحنی لورنتس توسط پژوهشگران پیش‌نهاد شده‌اند. اهمیت مدل‌بندی منحنی لورنتس در این است که پژوهشگر می‌تواند به‌جای کار با انبوهی از داده‌های درامد تنها با یک مدل مناسب به بررسی نحوه‌ی توزیع درامد در جامعه و تجزیه و تحلیل نابرابری‌ها بپردازد. خسروی طناک [۲] با استفاده از اصل آنتروپی بیشینه مدلی را برای منحنی لورنتس پیش‌نهاد داد که برازش خوبی به داده‌های درامد تحت بررسی آن‌ها داشت. نتیجه‌های برازش مدل‌ها به داده‌های هزینه‌ی خانوارهای ایرانی نیز نشان داد که این منحنی دارای قابلیت بالایی در مدل‌بندی منحنی لورنتس برای داده‌های ایران نیز است. از این‌رو با استفاده از این مدل می‌توان به تحلیل وضعیت نابرابری در جامعه مانند براورد شاخص‌های مختلف نابرابری از جمله شاخص پیترا، بون‌فرونی و ... و همچنین سهم گروه‌های مختلف مانند دهک‌ها پرداخت. در نتیجه این مدل را به‌عنوان یک عضو جدید ارزشمند به رده‌ی منحنی‌های لورنتس موجود اضافه می‌کنیم.

توضیحات

1. https://cran.r-project.org/web/packages/ineq

مرجع‌ها

[۱] ابونوری ا. و ایرجی ف. (۱۳۸۳). مقایسه آماری توزیع درامد در استان خراسان با کل کشور (۱۳۸۰-۱۳۵۰). فصلنامه برنامه و بودجه، شماره ۹، ۸۲–۵۹.

[۲] خسروی طناک، ع. (۱۳۹۶). آنتروپی بیشینه بر اساس اندازه‌های نابرابری درامد. رساله دکتری، دانشگاه فردوسی مشهد.

[۳] مجیری، آ.؛ محتشمی برزادران، غ.؛ واقعی، ی. (۱۳۸۷). براورد منحنی لورنتس و ضریب جینی به روش پارامتری. گزیده مطالب آماری، شماره ۱، ۱۴–۱ .

[4] Arnold, B.C. (1986). A Class of Hyperbolic Lorenz Curves, Sankhya B, **48**, 427–436.

[5] Chotikapanich, D. (1993). A Comparison of Alternative Functional forms for the Lorenz curve, Economic Letters, **41**, 129–138.

[6] Gastwirth, J. (1971). A General Definition of the Lorenz Curve. Econometrica, **39**, 1037–1039.

[7] Gini, C. (1914). Sulla Misura Della Concentrazione e Della Variabilità dei Caratteri, Atti del Reale Istituto Veneto di Science, Lettere ed Arti, **73**, 1203–1248.

[8] Gupta, M.R. (1984). Functional form for Estimating the Lorenz Curve. Econometrica, **52**, 1313–1314.

[9] Kakwani, N.C. (1980). On a Class of Poverty Measures, Econometrica, **48**, 437–446.

[10] Kakwani, N.C. and Podder, N. (1973). On Estimation of Lorenz Curves from Grouped Observations, International Economic Review, **14**, 278–292.

[11] Lorenz, M.O. (1905). Methods of Measuring the Concentration of Wealth, Quarterly Publications of the American Statistical Association, **9**, 209–219.

[12] Ortega, P., Martín, A., Fernández, A., Ladoux, M. and García, A. (1991). A New Functional Form for Estimating Lorenz Curves, Review of Income and Wealth, **37**, 447–452.

[13] Pakes, A.G. (1981). On Income Distributions and Their Lorenz Curves. Technical report, Dept. of Mathematics, University of Western Australia, Nedlands, WA.

[14] Rasche, R.H., Gaffeny, J., Koo, A. and Obst, N. (1980). Functional Forms for Estimating the Lorenz Curve. Econometrica, **48**, 1061–1062.

[15] Rohde, N. (2009). An Alternative Functional Form for Estimating the Lorenz Curve. Economics Letters, **105**, 61–63.

[16] Sarabia, J.M., Castillo, E. and Slottje, D.J. (1999). An Ordered Family of Lorenz Curves, Journal of Econometrics, **91**, 43–60.

[17] Tsallis, C. (1988). Possible Generalization of Boltzmann-Gibbs Statistics. Journal of Statistical Physics, **52**, 479-487.

علی خسروی طناک

دکتری آمار

استان سیستان و بلوچستان، ایرانشهر، دانشگاه ولایت، گروه آمار.

رایانشانی: a.khosravi@velayat.ac.ir

غلامرضا محتشمی برزادران

دکتری آمار

مشهد، دانشگاه فردوسی مشهد، گروه آمار.

رایانشانی: grmohtashami@um.ac.ir