مجله‌ی بررسی‌های آمار رسمی ایران
سال ۲۵، شماره‌ی ۲، پاییز و زمستان ۱۳۹۳، صص ۱۴۹– ۱۶۰

روش نوین براوردیابی: براوردگرهای گشتاوری با وزن احتمالی تعدیل‌یافته

افشین فیاض موقر* و زهره محمودی

دانشگاه مازندران

چکیده: در این مقاله روش جدیدی در نظریه‌ی براوردیابی با عنوان براوردگرهای گشتاوری با وزن احتمالی تعدیل یافته (APWME)[1] معرفی می‌شود، که تعمیمی از روش گشتاوری با وزن احتمالی (PWM)[2] می‌باشد. از این روش برای براورد پارامتر توزیع یکنواخت $(\circ, \theta)$ استفاده کردیم. سپس بر اساس یک مطالعه‌ی عددی، میانگین مربعات خطا[3] روش‌های براوردیابی APWM، روش گشتاوری، روش حداکثر درستنمایی، روش گشتاوری تعدیل‌یافته و روش گشتاوری با وزن احتمالی مقایسه شد. این مقایسه نشان می‌دهد که براوردگر روش APWM دارای میانگین مربعات خطا کم‌تری نسبت به سایر براوردگرها است. همچنین این نتایج عددی نشان داد که براوردگر APWM برای توزیع یکنواخت دارای خاصیت نرمال مجانبی نیست.

واژگان کلیدی: براوردگر گشتاوری با وزن احتمالی؛ براوردگر گشتاوری تعدیل‌یافته؛ براورد گشتاوری با وزن احتمالی تعدیل‌یافته؛ مجموع اشتیل یس تصادفی.

۱- مقدمه

براورد پارامترهای توزیع‌های احتمالی و معرفی براوردگرهای مناسب، موضوعی است که سالیان متمادی نظر آماردانان را به خود جلب کرده است. در این زمینه، روش‌های مختلفی که هر کدام مزایا و معایب مخصوص به خود دارند، ارایه شده است که از آن جمله می‌توان روش گشتاوری، روش حداکثر درستنمایی، روش بیزی و ... را نام برد [۱]. شاید بتوان گفت که روش گشتاوری یکی از قدیمی‌ترین روش‌ها برای براورد

* نویسنده‌ی عهده‌دار مکاتبات
دریافت: ۱۳۹۳/۸/۱۹، پذیرش: ۱۳۹۴/۶/۲۴.

پارامترها است، که توسط کارل پیرسن در سال ۱۸۹۴ معرفی شد و همچنین روش حداکثر درستنمایی مهم‌ترین روش یافتن براوردگرها در براورد نقطه‌ای است. یک براوردگر بیزی به‌صورت میانگین توزیع پسین است، یا از دیدگاه نظریه‌ی تصمیم به‌صورت براوردگری دارای کوچک‌ترین متوسط مخاطره است [۱].

در بخش دوم این مقاله به معرفی براوردیاب‌های گشتاوری با وزن احتمالی [۲، ۳، ۴] و روش گشتاوری تعدیل‌یافته [۵، ۶] می‌پردازیم. در ادامه روش جدید براوردیاب معرفی می‌شود. در بخش چهارم براوردگر پارامتر توزیع یکنواخت $(\circ,\theta)$ با استفاده از روش‌های مختلف، همراه با میانگین مربعات خطای آن‌ها ارایه و در بخش آخر مقایسه‌ی عددی براوردگرهای ارایه‌شده در بخش چهارم از طریق میانگین مربعات خطاها انجام می‌شود.

۲- روش‌های براوردیاب PWM و AMM

از آن‌جایی که روش جدید براورد بر اساس دو روش PWM و AMM حاصل شده است، در ابتدا لازم است که این دو روش به طور مختصر بیان شوند.

۲-۱- روش براوردیابی PWM

روش گشتاوری با وزن احتمالی، تعمیمی از روش گشتاوری معمولی است که توسط گرین‌وود و همکاران در سال ۱۹۷۹ معرفی شده است [۲]. براوردگرهای گشتاوری با وزن احتمالی، دارای واریانس کم و اریبی ناچیز هستند و همانند براوردگرهایی که به روش درستنمایی به‌دست می‌آیند، سازگارند [۳]. همچنین یکی از دلایل دیگر استفاده از روش PWM این است که، در توزیع‌هایی که دارای دم‌های سنگین هستند از جمله توزیع مقادیر فرین، وایبل، گامبل و ... در نمونه‌گیری مشاهدات کم‌تری از دم توزیع حاصل می‌شود. در براورد پارامترهای مدل از آن‌جایی که تأثیر این نمونه‌های کمیاب در براورد کم است از این‌رو بهتر است که با موزون کردن براورد اثر این داده‌های نادر را افزایش داد و براورد مناسب‌تری به‌دست آورد.

گشتاور با وزن احتمالی برای یک متغیر تصادفی X، با تابع توزیع

$$F_\theta(x) = P_\theta(X \leq x)$$

به‌صورت زیر معرفی می‌شود:

$$M_{(p,r,s)} = E_\theta\left[X^p\{F_\theta(X)\}^r\left\{1 - F_\theta(X)\right\}^s\right], \tag{1}$$

که در آن r،p و s مقادیر حقیقی هستند. هنگامی که معکوس تابع توزیع، $x(F)$، را بتوان به فرم بسته‌ای نوشت، رابطه‌ی (۱) به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$M_{(p,r,s)} = \int_0^1 \{x(F)\}^p F^r (1 - F)^s dF, \tag{2}$$

که در آن F دارای توزیع یکنواخت (۰, ۱) است، که به این ترتیب گشتاورها با وزن احتمالی را می‌توان آسان‌تر به‌دست آورد. همان‌طور که دیده می‌شود کمیت‌های $M_{(p,0,0)}$ $(p = 1, 2, \ldots)$ گشتاورهای معمولی غیر مرکزی را به‌دست می‌دهند. براورد پارامتر θ مشابه روش براوردیابی گشتاوری، از برابری گشتاورهای با وزن احتمالی جامعه با مقدار به‌دست آمده‌ی آن بر اساس نمونه حاصل می‌شود. در حالت خاص که $s = 0$ یا ($r = 0$) فرض می‌شود [۲]، براورد پارامتر θ از رابطه‌های زیر حاصل می‌شود:

$$a_s = M_{(1,0,s)} = E_\theta\left[X\left\{1 - F_\theta(X)\right\}^s\right], \tag{3}$$

یا

$$b_r = M_{(1,r,0)} = E_\theta[X\{F_\theta(X)\}^r], \tag{4}$$

که در آن

$$a_s = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\binom{n-j}{s}}{\binom{n-1}{s}} x_{(j)}, \tag{5}$$

و

$$\mathrm{b}_r = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\binom{j-1}{r}}{\binom{n-1}{r}} x_{(j)}, \tag{6}$$

و $x_{(j)}$، مقدار مشاهده‌شده‌ی $X_{(j)}$، j امین آماره‌ی ترتیبی نمونه‌ی تصادفی n تایی است. لازم به ذکر است که میان $M_{(1,0,s)}$ و $M_{(1,r,0)}$ یک رابطه‌ی خطی وجود دارد [۲و ۳].

از این روش در براورد پارامترهای چندین توزیع مهم از جمله گامبل، لجستیک و وایبل استفاده شده که نتایج مطلوبی نسبت به سایر روش‌های براوردیابی حاصل شده است [۳و ۴]. همچنین از خواص این براوردگر می‌توان به توزیع مجانبی نرمال آن اشاره کرد [۳].

۲-۲- روش براوردیابی AMM

روش براورد گشتاوری تعدیل‌یافته (AMM) روشی است که با ایجاد تغییراتی در روش گشتاوری حاصل شده و برای اولین بار توسط سلطانی و حومه‌ای در سال ۲۰۰۹ مطرح گردیده است [۶]. روش AMM به آسانی و تا زمانی که تکیه‌گاه توزیع مشخص‌شده، بر فواصل متناهی تعریف شود، قابل استفاده و براورد حاصل در محدوده‌ی دامنه‌ی پارامتر است. به عبارت دیگر برخلاف براوردگرهای MM براوردهای حاصل از روش AMM حافظ دامنه‌ی پارامتر می‌باشند.

براوردگرهای حاصل از این روش همانند براوردگرهای MM، جواب دستگاهی از معادلات هستند، که از برابری گشتاورهای نمونه با مجموع اشتیل یس تصادفی گشتاور متناظر جامعه، به‌دست می‌آیند.

فرض کنید $X_۱, \dots, X_n$ یک نمونه‌ی تصادفی n تایی از جامعه‌ای با تابع توزیع دلخواه $F_\theta(x)$ با پارامتر مجهول θ باشد. از آن‌جا که

$$\mu_k = E(X^k) = \int_\Omega X^k \, dP = \int_{\mathcal{R}} x^k \, dF(x) \qquad (۷)$$

بر اساس نظریه‌ی انتگرال‌گیری کلاسیک، انتگرال موجود در سمت راست رابطه‌ی (۷) را می‌توان به‌صورت kامین توان از مجموع اشتیل یس تصادفی بالایی (پایینی) به‌صورت زیر تقریب زد:

$$X^k_{(U)F} = \sum_{j=۱}^{n} X_{(j)}{}^k \left[F\left(X_{(j)}\right) - F\left(X_{(j-۱)}\right)\right], \quad k = ۱,۲,\dots \qquad (۸)$$

$$X^k{}_{(L)F} = \sum_{j=۱}^{n} X_{(j)}{}^k \left[F\left(X_{(j+۱)}\right) - F\left(X_{(j)}\right)\right], \quad k = ۱,۲,\dots$$

کـه در آن $F\left(X_{(\circ)}\right) = \circ$، $F\left(X_{(n+۱)}\right) = ۱$ و $X_{(۱)} \leq \cdots \leq X_{(n)}$ آمـاره‌هـای ترتیبی متناظر با $X_۱, \dots, X_n$ هستند. حال اگر توزیع F دارای j پارامتر مجهول باشد، آنگاه از حل j معادله‌ی غیر خطی زیر

$$X_{(U)F}^{k} = \mu_k \qquad k = ۱,۲, \dots, j$$

که در آن μ_k گشتاور غیر مرکزی جامعه است، مـی‌تـوان بـه بـراورد j پـارامتر مجهـول پرداخت. روش براوردگر AMM برای توزیع‌هایی با تکیه‌گـاه متنـاهی قابـل اسـتفاده و بـراورد حاصـل در محـدوده‌ی دامنـه‌ی پـارامتر مـی‌باشـد. در سـال ۲۰۱۲ سـلطانی و عبدا..نژاد با استفاده از روش AMM براورد پارامتر توزیع یکنواخت و ویژگی‌های این براوردگر را ارایه و نتایج حاصل را با براوردگرهای ML وMM مقایسه کردند.

۳- معرفی روش جدید براوردیابی APWM

فرض کنید $X_۱, \dots, X_n$ یک نمونه‌ی تصادفی n تایی از جامعه‌ای با تابع توزیع دلخـواه $F_\theta(x)$ با پارامتر مجهول θ باشد. همان‌طور که در زیربخش ۱-۲- بـه آن اشـاره شـد گشتاور وزنی احتمالی را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} M_{(p,r,s)} &= E_\theta\left[X^p\{F_\theta(X)\}^r\left\{۱ - F_\theta(X)\right\}^s\right] \\ &= \int_0^{۱} \{x(F)\}^p F^r(۱ - F)^s dF, \end{aligned}$$

بر اساس نظریه‌ی انتگرال‌گیری کلاسیک، انتگرال موجود در رابطه‌ی بالا را می‌تـوان از مجموع اشتیل یس تصادفی بالایی (پایینی) برای $p, r, s = \circ, ۱, ۲, \dots$ به‌صورت زیر تقریب زد:

$$X_{(U)(p,r,s)} = \sum_{j=۱}^{n} X_{(j)}{}^p \{F(X_{(j)})\}^r\{۱ - F(X_{(j)})\}^s \times\left[F(X_{(j)}) - F\left(X_{(j-۱)}\right)\right], \qquad (۹)$$

$$X_{(L)(p,r,s)} = \sum_{j=1}^{n} X_{(j)}{}^{p} \left\{F\left(X_{(j)}\right)\right\}^{r} \left\{1 - F\left(X_{(j)}\right)\right\}^{s} \times \left[F\left(X_{\left(j+1\right)}\right) - F\left(X_{(j)}\right)\right]$$

کـه در آن $F(X_{(0)}) = 0$، $F(X_{(n+1)}) = 1$ و $X_{(1)} \leq \cdots \leq X_{(n)}$ آمـارەهـای ترتیبی متناظر بـا $X_1, \dots, X_n$ هسـتند. پـارامتر مجهـول θ از تسـاوی رابطـه‌ی (۹) بـا گشتاور متناظر جامعه براورد می‌شود.

۴- براورد پارامتر توزیع یکنواخت براساس روش‌های مختلف براوردیابی

در این بخش به مقایسه و بررسی براوردگرهای پارامتر مجهول توزیع یکنواخت $(0, \theta)$ می‌پردازیم. فرض کنید، $U_1, \dots, U_n$ یک نمونه‌ی تصادفی از توزیـع یکنواخـت $(0, \theta)$ باشـد. براوردگـر θ و میـانگین مربـع خطـای (MSE) آن را بـر اسـاس روش‌هـای براوردیابی مختلف در ادامه به‌دست می‌آوریم.

۴-۱- روش براورد گشتاوری با وزن احتمالی تعدیل‌یافته (APWM)

بـرای بـراورد پارامترهـای رابطـه‌ی (۹) هماننـد روش گشـتاوری، بـه‌دلیل این‌کـه یـک پارامتر بـرای بـراورد وجـود دارد، $p = 1$ در نظر گرفتـه شـده اسـت. از طرفـی جهـت سهولت محاسبات و با توجه به پیشینه‌ی استفاده روش PWM که در آن s یـا r برابـر صفر است [۲،۳و ۴]، در اینجا $s = 0$ انتخاب شده است. در این صـورت پـارامتر θ توزیع یکنواخت به‌صورت زیر براورد می‌شود:

$$\frac{\theta}{r+2} = \sum_{j=1}^{n} U_{(j)}\{F(U_{(j)})\}^{r} \left[F(U_{(j)}) - F(U_{\left(j-1\right)})\right], \qquad (10)$$

حال با قرار دادن تابع توزیع تجمعیِ توزیع یکنواخت در رابطه‌ی (۱۰) داریم:

$$\frac{\theta}{r+2} = \sum_{j=1}^{n} U_{(j)}\{\frac{U_{(j)}}{\theta}\}^{r} \left[\frac{U_{(j)}}{\theta} - \frac{U_{(j-1)}}{\theta}\right],$$

و در نتیجه:

$$\hat{\theta}_{APWM}(\mathrm{n}) = \left[\left(r+۲\right) \sum_{j=۱}^{n} U_{(j)}{}^{\left(r+۱\right)} \left(U_{(j)} - U_{\left(j-۱\right)}\right)\right]^{\left(\frac{۱}{r+۲}\right)}$$

همچنین فرمول بسته‌ای برای MSE براوردگر حاصل نشد که مقادیر آن را به‌صورت عددی از طریق شبیه‌سازی محاسبه خواهیم نمود.

۲-۴- روش گشتاوری با وزن احتمالی (PWM)

همان‌طور که در زیر بخش ۱-۲- گفته شد با استفاده از روابط (۴) و (۶) براورد θ از حل رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$b_r = M_{(۱,r,۰)} = \mathrm{E}_\theta[U\,\{F_\theta(U)\}^r]$$

بنابراین براوردگر PWM پارامتر θ برابر است با:

$$\hat{\theta}_{PWM}(\mathrm{n}) = \left(\mathrm{r}+۲\right)\frac{۱}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\binom{j-۱}{r}}{\binom{n-۱}{r}}U_{(j)}$$

و همچنین MSE این براوردگر عبارت است از:

$$MSE\left(\hat{\theta}_{PWM}(n)\right) = \theta^{۲}\left[\frac{n^{-۲}\left(r+۲\right)^{۲}}{\left(n+۱\right)\left(n+۲\right)}\sum_{i=۱}^{n} i\left(i+۱\right)\frac{\binom{i-۱}{r}^{۲}}{\binom{n-۱}{r}^{۲}} + \frac{۲\left(r+۲\right)n^{-۱}}{\left(n+۱\right)\left(n+۲\right)}\sum_{i=۱}^{n-۱}\sum_{j=i+۱}^{n} i(j+۱)\frac{\binom{i-۱}{r}\binom{j-۱}{r}}{\binom{n-۱}{r}^{۲}} + \left(\frac{\left(r+۲\right)}{n}\sum_{i=۱}^{n}\frac{i}{\left(n+۱\right)}\frac{\binom{i-۱}{r}}{\binom{n-۱}{r}} - ۱\right)^{۲}\right]$$

۳-۴- روش گشتاوری تعدیل‌یافته (AMM)

با استفاده از رابطه‌ی (۸) و با جایگذاری امید ریاضی و تابع توزیع تجمعی، توزیع یکنواخت در آن‌ها براوردگر AMM پارامتر θ به‌صورت

$$\hat{\theta}_{AMM}(\mathrm{n}) = \left[۲\sum_{j=1}^{n} U_{(j)}\left(U_{(j)} - U_{(j-۱)}\right)\right]^{\frac{۱}{۲}}$$

به‌دست می‌آید [۵]. همچنین میانگین مربع خطای نسبی[۴] این براوردگر به‌صورت زیر است [۵]:

$$\mathrm{MSRE}\left(\widehat{\theta^{۲}}_{\mathrm{AMM}}(n)\right) = E\left[\frac{\widehat{\theta^{۲}}_{\mathrm{AMM}}(n) - \theta^{۲}}{\theta^{۲}}\right]^{۲} = \frac{۴(n+٦)}{(n+۲)(n+۳)(n+۴)}$$

۵- نتایج عددی

در این بخش محاسبات عددی مربوط به نتایج حاصل‌شده در بخش ۴ بر اساس شبیه‌سازی به‌دست می‌آید. در ادامه این نتایج با روش‌های PWM و ML به‌صورت عددی مقایسه می‌شود.

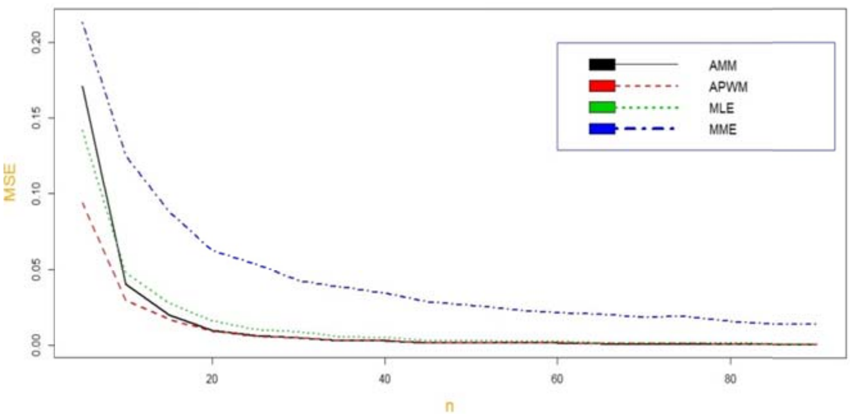
۵-۱- بررسی خطای براورد

در این قسمت به مطالعه‌ی عددی روش‌های مطرح‌شده در بخش ۴ می‌پردازیم. برای این منظور ۱۰۰۰۰ بار نمونه‌ای از توزیع یکنواخت به اندازه‌ی n، $n = (۱۰,۲۰,۵۰,۷۰,۹۰)$ انتخاب و مقدار MSE را برای روش‌های مختلف محاسبه کردیم (جدول ۱).

همان‌طور که مشاهده می‌شود، روش APWM دارای MSE کم‌تری نسبت به بقیه‌ی روش‌های براوردیابی می‌باشد، هر چند که با افزایش اندازه‌ی نمونه مقدار MSE برای دو روش APWM و AMM به یکدیگر نزدیک می‌شوند (شکل ۱ و جدول ۱).

جدول ۱- میانگین مربعات خطا بر اساس اندازه نمونه‌های متفاوت برای براورد پارامتر توزیع یکنواخت $(\circ,\theta)$ با $r = ۲$.

θ	روش \ n	۱۰	۳۰	۵۰	۷۰	۹۰
	APWM	۰/۰۳۱۱۹	۰/۰۰۴۱۱	۰/۰۰۱۵۷	۰/۰۰۰۷۶	۰/۰۰۰۵۰
	PWM	۰/۰۶۱۶۴	۰/۰۱۹۳۸	۰/۰۱۱۶۴	۰/۰۰۸۲۲	۰/۰۰۶۳۷
۲	*AMM*	۰/۰۳۹۸۰	۰/۰۰۴۲۷	۰/۰۰۱۵۸	۰/۰۰۰۷۶	۰/۰۰۰۵۰
	ML	۰/۰۵۰۶۷	۰/۰۰۷۶۰	۰/۰۰۲۹۹	۰/۰۰۱۴۹	۰/۰۰۰۹۷
	MM	۰/۱۹۲۴۲	۰/۲۱۸۳۸	۰/۲۵۸۰۰	۰/۳۲۸۰۰	۰/۵۶۰۹۳
	APWM	۰/۱۱۹۰۴	۰/۰۱۶۶۱	۰/۰۰۶۲۸	۰/۰۰۳۱۶	۰/۰۰۱۸۸
	PWM	۰/۲۴۸۸۴	۰/۰۷۸۱۳	۰/۰۴۵۸۸	۰/۰۳۳۵۰	۰/۰۲۶۲۰
۴	*AMM*	۰/۱۶۰۹۰	۰/۰۱۶۰۲۴	۰/۰۰۶۲۳	۰/۰۰۳۱۸	۰/۰۰۱۸۸
	ML	۰/۲۰۲۷۶	۰/۰۳۰۰۶۹	۰/۰۱۱۸۷	۰/۰۰۶۰۷	۰/۰۰۳۷۲
	MM	۰/۴۹۲۱۸	۰/۰۱۷۶۴۵	۰/۱۰۵۲۷	۰/۰۷۴۹۶۸	۰/۰۵۷۸۱



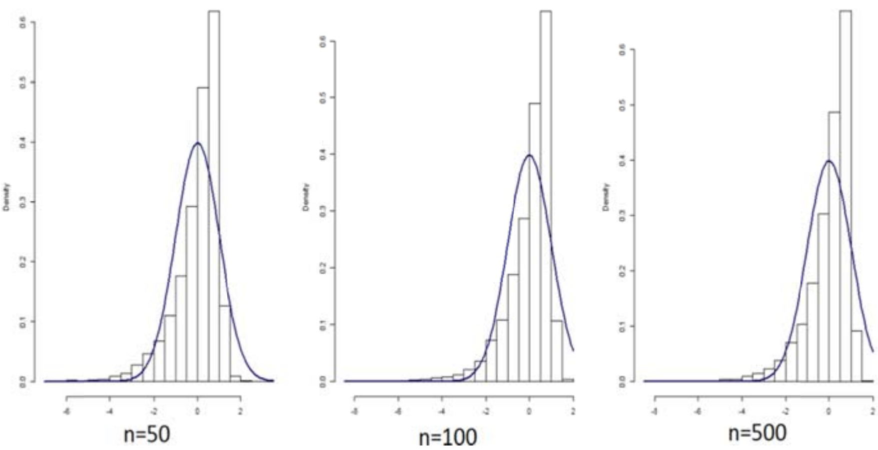
شکل ۱- نمودار تغییرات MSE روش‌های مختلف براوردیابی بر اساس اندازه‌ی نمونه‌های متفاوت برای براوردگر پارامتر توزیع یکنواخت $(\circ,\theta)$ وقتی $r = ۲$ و $\theta = ۲$.

۲-۵-بررسی خاصیت مجانبی براوردگر APWM

دارا بودن خاصیت مجانبی یک براوردگر از محاسن آن براوردگر است. از این رو به بررسی عددی این موضوع می‌پردازیم. می‌دانیم براوردگر AMM پارامتر θ برای توزیع

یکنواخت $(\circ,\theta)$ دارای خاصیت مجانبی نرمال نیست [۵]، این در حالی است که براوردگر PWM دارای خاصیت مجانبی نرمال است [۳]، از این رو بررسی توزیع مجانبی براوردگر APWM مطلوب است. برای این منظور داده‌های حاصل از شبیه‌سازی زیر بخش ۱-۵- را جهت بررسی این موضوع استفاده نموده و هیستوگرام آن‌ها رسم شده است (شکل ۲).

همان‌طور که مشاهده می‌شود توزیع براوردگر APWM به‌طور مجانبی از توزیع نرمال پیروی نمی‌کند و این مطلب توسط آزمون کلموگروف – اسمیرنوف $(p-value < ۲/۲e-۱۶)$ در اندازه‌ی نمونه‌های مختلف ۵۰، ۱۰۰ و ۵۰۰ تأیید می‌شود.



شکل ۲- هیستوگرام‌های $\hat{\theta}_{APWM}(n)$ بر اساس اندازه‌ی نمونه‌های مختلف برای براوردگر پارامتر توزیع یکنواخت $(\circ,\theta)$ با $r=۲$ و $\theta=۲$.

نتایج جدول ۲ نیز به خوبی نشان می‌دهد که توزیع براورد θ به روش APWM چوله به چپ است و با افزایش اندازه‌ی نمونه، چولگی تغییر چندانی ندارد. این مطلب را می‌توان با توجه به مقادیر $p-value$ نیز مشاهده نمود. از طرف دیگر، برای

$n = ۵۰۰$، تعـداد مشـاهدات $\hat{\theta}$ در بـازه‌ی $\bar{\hat{\theta}} \pm S_{\hat{\theta}}$ ، ۷۶% و در بـازه‌ی $\bar{\hat{\theta}} \pm ۲S_{\hat{\theta}}$ حدود ۹۳% است، که خاصیت نرمال بودن را نقض می‌کند.

جدول ۲- کمیت‌های مختلف توزیع براورد APWM پارامتر توزیع یکنواخت $(۰,\theta)$ با $r = ۲$ و $\theta = ۲$ بر اساس اندازه‌ی نمونه‌های متفاوت.

کمیت‌ها / n	کشیدگی	چولگی	$p - value$
۵۰	۶/۸۶۱	۱/۷۰۹-	$< ۲/۲e - ۱۶$
۱۰۰	۷/۸۹۱	۱/۹۱۴-	$< ۲/۲e - ۱۶$
۵۰۰	۷/۷۱۹	۱/۸۹۴-	$< ۲/۲e - ۱۶$

۶- بحث و نتیجه‌گیری

روش جدید ارایه‌شده بر روی توزیع یکنواخت نتیجه‌ی بهتری را نسبت به بقیه‌ی روش‌ها نشان می‌دهد، که این می‌تواند آغازی بر تحقیق و مطالعه‌ی عمیق‌تر روی این روش باشد. هر چند وقتی اندازه‌ی نمونه افزایش می‌یابد میزان خطای روش APWM به AMM نزدیک می‌شود، ولی از آن‌جایی که در بیش‌تر مطالعات انتخاب اندازه‌ی نمونه‌ی بزرگ امکان‌پذیر نیست از این رو مزیت APWM به AMM آشکار می‌شود.

توضیحات

1. Adjusted Probability Weighted Moments Estimation
2. Probability Weighted Moments
3. Mean Square Error
4. Mean of Square Relative Error

مرجع‌ها

[1] Casella, G. and Berger, R.L. (1989). *Statistics Inference*, Wadsworth, Pacific Grove, CA.

[2] Greenwood, J.A., Landwehr, J.M., Matalas, N.C. and Wallis, J.R. (1979). Probability Weighted Moments: Definition and Relation to Parameters of Several Distribution Expressable in Inverse Form. *Water Resources Research*, **15**, 1049-1054.

[3] Hosking, J.R.M., Wallis, J.R. and Wood, E.F. (1985). Estimation of the Generalized Extreme Value Distribution by the Method of Probability Weigthed Moments. *Technometrics*, **27**, 251-261.

[4] Landwehr, J.M., Matalas, N.C. and Wallis, J.R. (1979). Probability Weighted Moments Compared with Some Traditional in Estimation Gumbel Parameters and Quantiles. *Water Resources Research*, **15**, 1055-1064.

[5] Soltani, A.R. and Abdollahnezhad, K. (2012). On Adjusted Method of Moments Estimators on Uniform Distribution Samples. *Metron*, **70**, 27–40.

[6] Soltani, A.R, and Homei, H. (2009). A Generalization for Two–Sided Power Distribution and Adjusted Method of Moments. *Statistics*, **43**, 611–620.

افشین فیاض موقر
دکتری آمار
استان مازندران، بابلسر، دانشگاه مازندران، گروه آمار.
رایانشانی: a_fayyaz@umz.ac.ir

زهره محمودی
فوق لیسانس آمار
استان مازندران، بابلسر، دانشگاه مازندران، گروه آمار.
رایانشانی: zohreh.mahmoudi2014@gmail.com