مجله‌ی بررسی‌های آمار رسمی ایران
سال ۲۵، شماره‌ی ۲، پاییز و زمستان ۱۳۹۳، صص ۱۷۵ – ۱۸۹

# تعیین اندازه‌ی نمونه در مدل‌های چندسطحی با استفاده از رویکرد بیزی

امید اخگری و موسی گل‌علیزاده*

دانشگاه تربیت مدرس

**چکیده**: یکی از تأثیرگذارترین فاکتورها برای انجام هر تحقیق آزمایشی در علوم مختلف تعیین اندازه‌ی نمونه‌ی لازم برای موضوع مورد مطالعه است. از نقطه نظر آماری، تعیین اندازه‌ی نمونه‌ی بهینه علاوه بر وابستگی به توان آماری، ضریب اطمینان، اندازه‌ی اثر و توابع هزینه به ماهیت داده‌های مورد مطالعه نیز مربوط می‌شود. اگر داده‌های مورد مطالعه دارای ساختار همبستگی درون‌گروهی باشند یک مدل آماری مناسب برای آن‌ها مدل‌های چندسطحی است. به‌دلیل ماهیت سلسله مراتبی این مدل‌ها تعیین اندازه‌ی نمونه‌ی بهینه در آن‌ها از پیچیدگی‌های خاصی برخوردار است. در مقاله‌ی حاضر به منظور تعیین اندازه‌ی نمونه در مدل‌های چندسطحی از سه معیار عملکرد بیزی مرتبط با پارامترهای مدل استفاده شد. با توجه به این که توزیع‌های پسین فرم بسته نداشتند بنا به شرایط موجود استفاده از الگوریتم‌های محاسبات آماری اجتناب‌ناپذیر است. اما، با توجه به این که توزیع‌های شرطی کامل پارامترها دارای فرم بسته بودند، به‌منظور ارزیابی معیارهای عملکرد از الگوریتم نمونه‌گیری گیبز برای شبیه‌سازی از توزیع‌های شرطی کامل پارامترهای مدل استفاده شد.

**واژگان کلیدی**: مدل‌های چندسطحی؛ تعیین اندازه‌ی نمونه‌ی بهینه؛ معیارهای عملکرد بیزی؛ اثر طرح نمونه‌گیری؛ الگوریتم گیبز.

---

* نویسنده‌ی عهده‌دار مکاتبات

دریافت: ۱۳۹۳/۱۰/۳، پذیرش: ۱۳۹۴/۶/۲۴.

## ۱- مقدمه

موارد بسیاری از مثال‌های مربوط به علوم پزشکی، اجتماعی، کشاورزی و ... وجود دارند که داده‌های مورد مطالعه در آن‌ها به‌صورت درون‌گروهی همبسته هستند در حالی که گروه‌های مختلف مستقل از هم می‌باشند. به عنوان مثال دانش‌آموزان یک مدرسه را در نظر بگیرید که هدف بررسی تأثیر تعداد ساعت مطالعه‌ی دانش‌آموزان روی نمرات درسی آنان است. می‌توان پذیرفت که دانش‌آموزان یک کلاس از نظر ویژگی نمرات به هم وابسته‌اند ولی دانش‌آموزان هر کلاس از دیگر کلاس‌ها مستقل‌اند. در این‌گونه موارد داده‌ها به‌صورت همبستگی درون‌گروهی و استقلال بین‌گروهی دسته‌بندی می‌شوند. چنین داده‌هایی به داده‌های آشیانی یا داده‌های با ساختار سلسله‌مراتبی معروف‌اند. گرچه تحلیل آماری چنین داده‌هایی با روش‌های رگرسیون خطی معمولی قابل انجام است، اما با توجه به این که یکی از فرض‌های اساسی رگرسیون ساده استقلال آماری بین همه‌ی مشاهدات است، نقض این فرض سبب می‌شود که خطای استاندارد براورد پارامترهای مدل به‌طور بالقوه کم‌براورد شوند [۴]. در برازش مدل رگرسیون خطی ساده معمولی به این نوع داده‌ها (داده‌های آشیانی یا داده‌های با ساختار سلسله‌مراتبی) علاوه بر نادیده گرفتن همبستگی درون‌گروهی، ساختار آشیانی آن‌ها نیز در نظر گرفته نمی‌شود. برای لحاظ این ویژگی‌ها از مدل‌های چندسطحی استفاده می‌شود که به شیوه‌ی ماهرانه‌ای همبستگی درون‌گروهی و استقلال بین‌گروهی و همچنین ساختار آشیانی آن‌ها را در نظر می‌گیرد [۷]. مدل‌های چندسطحی در کتب و مقالات مختلف با اسامی مدل اثرات آمیخته، مدل اثرهای تصادفی، مدل سلسله‌مراتبی، مدل پانلی و مدل آشیانه‌ای نیز معرفی می‌شود [۵].

بعد از توصیف جامع‌تری از مدل‌های چندسطحی در سال ۱۹۸۸ توسط گلداستین محققین مختلفی از حوزه‌های متفاوت علوم در زمینه‌ی تعیین اندازه‌ی نمونه در این مدل‌ها فعالیت کردند منابع [۴]، [۸] و [۱۱] به این موضوع پرداخته‌اند. اخیراً، با الگوبرداری از شبیه‌سازی پرحجم تعیین اندازه‌ی نمونه در انواع مختلفی از مدل‌های چندسطحی تنها بر اساس اطلاعات اولیه از مقادیر ثابت پارامترها در قالب یک برنامه‌ی نرم‌افزاری ممکن شد [۳]. با توجه به منابع موجود می‌توان گفت تعیین اندازه‌ی نمونه‌ی بهینه با رویکرد آمار بسامدی سابقه‌ی تقریباً طولانی دارد. اما موضوع اندازه‌ی نمونه‌ی بهینه‌ی بیزی در مدل‌های دوسطحی کم‌تر مورد توجه قرار گرفته است. با این حال چند استثناء وجود دارد.

دو نمونه از آن‌ها منابع [۱۰] و [۱۲] هستند که تعیین اندازه‌ی نمونه‌ی بیزی را در دو مدل خطی خاص مورد مطالعه قرار دادند. به زبانی دقیق‌تر، توجه آن‌ها دقیقاً به مدل‌های چندسطحی نبوده است. علیرغم این موضوع معیارهای ارزیابی تعیین اندازه‌ی نمونه‌ی بهینه‌ی بیزی در [۱۲] آمده است، محدودیت‌های مناسبی بوده‌اند طوری که در این مقاله نیز از آن‌ها استفاده شده است. ساختار مقاله‌ی حاضر به‌صورت زیر است: ابتدا در بخش دوم خلاصه‌ای گذرا از مدل‌های چندسطحی و در حالتی خاص مدل شیب تصادفی ارایه می‌شود. سپس در ادامه استنباط بیزی پارامترهای مدل شیب تصادفی و معیارهای عملکرد مدل بیان می‌شوند. نتایج حاصل از شبیه‌سازی و معیارهای عملکرد مدل در بخش چهارم ارایه می‌شوند. در انتها مقاله با بحث و نتیجه‌گیری کلی خاتمه می‌یابد.

## ۲- مدل‌های چندسطحی

مدل‌های چندسطحی تعمیمی از مدل‌های خطی است که در آن‌ها علاوه بر مدل‌بندی متغیر پاسخ ضرایب رگرسیونی نیز مدل‌بندی می‌شوند. معمولاً این‌گونه مدل‌بندی به مدل‌های اثرات ثابت و اثرات تصادفی معروف‌اند. ترکیب‌های خاصی از این اثرات منجر به گونه‌های متفاوتی از مدل‌های چندسطحی می‌شود که معروف‌ترین آن‌ها، سه مدل مؤلفه‌ی واریانس (ساده‌ترین مدل)، عرض از مبدا تصادفی با حضور متغیر تبیینی و مدل شیب تصادفی هستند. در ابتدا ساختار کلی مدل‌های دوسطحی بیان و سپس مدل شیب تصادفی معرفی و ویژگی‌های آن مرور می‌شود.

فرض کنید $N = \sum_{j=1}^{J} n_j$ فرد درون $J$ گروه، دسته‌بندی شده باشند طوری که $n_j$ تعداد افراد گروه $j$ام است. به علاوه فرض کنید هدف مطالعه این است که برای $J$ گروه، متغیر پاسخ (پیوسته) $y_j$ روی $p$ دسته از متغیرهای تبیینی پیوسته که در ماتریس $\boldsymbol{X}_j$ ذخیره شده‌اند، رگرسیون شود. از این‌رو، برای $j$امین گروه می‌توان نوشت:

$$\boldsymbol{Y}_j = \boldsymbol{X}_j \boldsymbol{\beta}_j + \boldsymbol{r}_j, \qquad j = 1, \dots, J \tag{1}$$

که در آن هر $\boldsymbol{X}_j$ ماتریسی با ابعاد $n_j \times p$ و $\boldsymbol{r}_j$ خطای مدل و یک متغیر تصادفی است طوری که

$$\boldsymbol{r}_j \sim N\left(0, \sigma^2 I_{n_j}\right), \tag{2}$$

که $I_p$ ماتریس همانی $p$ بعدی است. در ادبیات مدل‌های چندسطحی مدل (۱) همراه با فرض (۲) به مدل‌های سطح اول اشاره دارد و مدل‌های دوسطحی با در نظر گرفتن $\boldsymbol{\beta}_j$ در مدل (۱) به‌عنوان یک متغیر تصادفی شکل خواهد گرفت [۶]. یک حالت خاص مدل دوسطحی این است که $\boldsymbol{\beta}_j$ به‌صورت زیر مدل‌بندی شود،

$$\boldsymbol{\beta}_j = \boldsymbol{W}_j\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{u}_j, \qquad j = 1, \dots, J \tag{۳}$$

که در آن $\boldsymbol{W}_j$ ماتریس متغیرهای تبیینی در سطح گروه $j$ام، $\boldsymbol{\gamma}$ برداری از ضرایب ثابت و $\boldsymbol{u}_j$ بردار خطا و دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس $T$ است، یعنی $\boldsymbol{u}_j \sim N(0, T)$. در این صورت، $\boldsymbol{\beta}_j$ به‌عنوان متغیری تصادفی دارای توزیع نرمال با میانگین $\boldsymbol{W}_j\boldsymbol{\gamma}$ و واریانس $T$ است.
ترکیب فرمول‌های سطح اول و دوم مدل دوسطحی (روابط (۱) و (۳)) عبارت است از:

$$\boldsymbol{Y}_j = \boldsymbol{X}_j\, \boldsymbol{W}_j\, \boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{X}_j\boldsymbol{u}_j + \boldsymbol{r}_j, \tag{۴}$$

بنابراین $\boldsymbol{Y}_j$ دارای توزیع نرمال با میانگین $\boldsymbol{X}_j\, \boldsymbol{W}_j\, \boldsymbol{\gamma}$ و ماتریس کواریانس $\boldsymbol{X}_j\boldsymbol{T}\boldsymbol{X}_j' + \sigma^2 I_{n_j}$ است. واضح است که $\boldsymbol{Y}_j$ براساس هر دو اثرات ثابت $\boldsymbol{\gamma}$ و اثرهای تصادفی $(\boldsymbol{u}_j, \boldsymbol{r}_j)$ مدل‌بندی شده است. به‌همین دلیل است که این مدل‌ها را به‌نام مدل‌های آمیخته نیز می‌شناسند [۵].

## ۲-۱- مدل شیب تصادفی

مدل شیب تصادفی زمانی شکل می‌گیرد که علاوه بر متغیر بودن عرض از مبدا، پارامتر شیب نیز بر حسب متغیر تبیینی تغییر کند. رابطه‌ی ریاضی آن به این صورت است که در سطح اول متغیر پاسخ $y$ مدل‌بندی می‌شود و در سطح دوم پارامتر عرض از مبدا و شیب مدل‌بندی می‌شوند. لذا داریم:

سطح اول: $y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}x_{ij} + \epsilon_{ij}, \quad i = 1, \dots, n_j \quad j = 1, \dots, J$

سطح دوم:
$$\beta_{0j} = \beta_{00} + \beta_{01}w_{0j} + u_{0j}$$
$$\beta_{1j} = \beta_{10} + \beta_{11}w_{1j} + u_{1j} \tag{۵}$$

که در آن $\epsilon_{ij} \sim N(0, \sigma_e^2)$ و

$$\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} u_{\circ j} \\ u_{\backslash j} \end{pmatrix} \sim N\left(\circ, \Gamma\right)$$

و

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \sigma^{\text{۲}}_{u_\circ} & \sigma_{\circ\text{۱}} \\ \sigma_{\circ\text{۱}} & \sigma^{\text{۲}}_{u_\text{۱}} \end{pmatrix}$$

که در آن $w$ متغیر تبیینی در سطح دوم است. نحوه‌ی ارایه‌ی مدل در روابط (۵) نه تنها همه‌ی متغیرهای وابسته را به ما نشان می‌دهد بلکه به روشنی نشان‌دهنده‌ی ماهیت دوسطحی مدل است. به‌علاوه در معادلات مدل (۵) تفکیک سطوح اول و دوم از هم به وضوح مشخص شده است به این ترتیب که سطح اول نشان‌دهنده‌ی یک رگرسیون خطی معمولی است و سطح دوم نحوه‌ی ارتباط پارامترهای سطح یک با متغیرهای سطح دوم را نشان می‌دهد.

## ۳- استنباط بیزی مدل شیب تصادفی

تحلیل بیزی در مدل‌های دوسطحی اولین بار در سال ۱۹۹۱ با استفاده از الگوریتم نمونه‌گیری گیبز برای مدل‌های چندسطحی لوژستیک مورد استفاده قرار گرفت [۱۳]. همچنین در سال ۱۹۹۳ نیز تحلیل بیزی مدل‌های چندسطحی با استفاده از الگوریتم نمونه‌گیر گیبز انجام شد [۸]. سپس چنین ایده‌ای برای مدل‌هایی با سطوح آشیانه‌ای بیش‌تر نیز تعمیم داده شد [۹]. همان‌طور که در روش‌های بیزی مرسوم است برای براورد پارامترها شخص به توزیع پیشین، تابع درستنمایی و محاسبه‌ی توزیع پسین نیاز دارد. از آن‌جایی که توزیع‌های پسین برخی پارامترها در مدل‌های چندسطحی فرم بسته‌ای ندارند، بکارگیری روش معروف $MCMC$ اجتناب‌ناپذیر خواهد بود. خواننده‌ی علاقه‌مند به مطالعه‌ی جنبه‌های مختلف روش‌های بیزی براورد پارامترهای مدل چندسطحی از جمله نحوه‌ی بکارگیری الگوریتم $MCMC$ می‌تواند به منبع [۲] مراجعه کند.

نکته‌ی قابل تأمل در روش‌های بیزی براورد پارامترهای مدل‌های چندسطحی به‌ویژه $MCMC$ ، حجم بالای محاسبات ناشی از بزرگ بودن بعد ماتریس کواریانس مدل است. به‌علاوه همبستگی زیاد بین پارامترها، به‌ویژه پارامترهای با اثرات ثابت و تصادفی، در

بعضی مواقع باعث مشکلاتی در همگرایی می‌شود [۵].
به‌دلیل ماهیت مدل‌های چندسطحی الگوریتم نمونه‌گیری گیبز بیش‌تر از الگوریتم‌های دیگر مورد استفاده قرار گرفت. دلیل اصلی آن وجود فرم بسته برای توزیع‌های شرطی کامل پارامترهای درگیر مدل است. به همین دلیل، در ادامه با پیروی از [۱] جزئیات اجرای الگوریتم گیبز برای براورد پارامترها و اثرهای تصادفی در مدل دوسطحی شیب تصادفی تشریح می‌شود.

### ۱-۳- الگوریتم نمونه‌گیری گیبز مدل شیب تصادفی

مدل شیب تصادفی زیر را در نظر بگیرید.

$$y_{ij} = \beta_0 + \beta_1 x_{ij} + u_{0j} + u_{1j}x_{ij} + \epsilon_{ij} \tag{۶}$$

$$i = 1, \dots, n_j \qquad j = 1, \dots, J \qquad \sum_{j=1}^{J} n_j = N$$

برای بکارگیری روش بیزی انتخاب مرسوم توزیع‌های پیشین برای پارامترهای مدل به‌صورت زیر هستند [۲]:

$$p\left(\beta_0\right) \propto 1, \qquad p(\beta_1) \propto 1$$

$$p(\Gamma) \sim IWishart\left(\nu_p, S_p\right), \qquad p\left(\frac{1}{\sigma_e^2}\right) \sim \Gamma(a_e, b_e) \tag{۷}$$

الگوریتم نمونه‌گیر گیبز برای این مدل عبارت است از:

**مرحله‌ی اول:** پارامتر $\boldsymbol{\beta}$ از توزیع نرمال دومتغیره با میانگین برداری $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ و ماتریس کواریانس $\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}_\beta$ تولید می‌شود به قسمی که $\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \left(\Sigma_{ij}\boldsymbol{X}_{ij}^T\boldsymbol{X}_{ij}\right)^{-1} \Sigma_{ij}\boldsymbol{X}_{ij}^T\left(y_{ij} - X_{ij}\right)$ و $\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}_\beta = \sigma_e^2\left(\Sigma_{ij}\boldsymbol{X}_{ij}^T\boldsymbol{X}_{ij}\right)^{-1}$ و $\boldsymbol{X}_{ij}$ به‌صورت $\left(1, x_{ij}\right)$ است.

**مرحله‌ی دوم:** به کمک نمونه‌های تولیدشده در مرحله‌ی اول، $\boldsymbol{u}_j$ از توزیع نرمال دومتغیره با میانگین $\widehat{\boldsymbol{u}}_j$ و واریانس $\widehat{\Sigma}_j$ تولید می‌شود که $\widehat{\Sigma}_j = \left[\Sigma_{ij}\frac{X_{ij}^T X_{ij}}{\sigma_e^2} + \boldsymbol{\Omega}_u^{-1}\right]$ و $\widehat{\boldsymbol{u}}_j = \frac{\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}_j}{\sigma_e^2}\Sigma_{ij}\boldsymbol{X}_{ij}^T\left(Y_{ij} - \boldsymbol{X}_{ij}\boldsymbol{\beta}\right)$.

**مرحله‌ی سوم:** با توجه به این که $\boldsymbol{\Omega}_u^{-1}$ دارای توزیع ویشارت است توزیع پسین آن نیز

دارای توزیع ویشارت با پارامترهای $\nu_u$ و $S_u$ خواهد بود به‌طوری که $\nu_u = J + \nu_p$ و $.\boldsymbol{S}_u = \left(\Sigma_j \boldsymbol{u}_j \boldsymbol{u}_j^T + \boldsymbol{S}_p^{-۱}\right)^{-۱}$

**مرحله‌ی چهارم:** برای براورد پارامتر $\frac{۱}{\sigma_e^۲}$ از توزیع گاما با پارامترهای $c_e$ و $d_e$ نمونه‌گیری شود که $c_e = \frac{N}{۲} + a_e$ و $.d_e = \Sigma \frac{\epsilon_{ij}^۲}{۲} + b_e$

همچنین توزیع‌های پیشین دیگری برای پارامترهای مدل در نظر گرفته می‌شود که از آن جمله می‌توان به توزیع پیشین نرمال برای اثرات ثابت $\beta_۰$ و $\beta_۱$ اشاره نمود. از طرفی در نظر گرفتن توزیع پیشین یکنواخت برای پارامتر $\sigma_e^۲$ معادل با توزیع پارتو با پارامترهای $\nu_e = -۲$ و $s_e^۲ = ۰$ است. همچنین توزیع یکنواخت روی $\log \sigma_e^۲$ هم ارز با $\nu_e = ۰$ و $s_e^۲ = ۰$ بوده و توزیع پیشین $\Gamma(\epsilon, \epsilon)$ برای $۱/\sigma_e^۲$ معادل با $\nu_e = ۲\epsilon$ و $s_e^۲ = ۱$ می‌باشد.

## ۲-۳- معیارهای ارزیابی اندازه‌ی نمونه‌ی بهینه‌ی بیزی

برای محاسبه‌ی اندازه‌ی نمونه با روش بیزی تعدادی معیار عملکرد مدل معرفی شد که از قابلیت‌های بالایی برخوردارند [۱۲]. معیارهای ارایه‌شده بر مبنای توزیع پسین $\pi(\theta|x)$ است. بدون از دست دادن کلیت مسئله فرض کنید قصد اعمال محدودیت‌هایی بر روی تابعی از $\theta$ مثل $\phi(\theta)$ را داریم. آن‌گاه معیارهای مورد نظر عبارت‌اند از:

**الف)** معیار متوسط واریانس پسین $(APVC)$[۱]: به ازای هر $\epsilon_۱ \geq ۰$، این معیار $n$ای را جستجو می‌کند که در رابطه‌ی

$$E\big(Var(\phi|x)\big) \leq \epsilon_۱ \qquad (۸)$$

صدق کند.

**ب)** معیار متوسط طول (ALC)[۲]: فاصله‌ی $A(x) = \left(F_{\phi|x}^{-۱}\left(\frac{\alpha}{۲}\right), F_{\phi|x}^{-۱}\left(۱ - \frac{\alpha}{۲}\right)\right)$ را

در نظر بگیرید. $A(x)$ یک براورد فاصله‌ای پسین با دم‌های برابر با احتمال $\alpha - ۱$ برای $\phi$ است. برای یک $l \geq ۰$ داده شده معیار ALC، در پی $n$ای است که در رابطه‌ی

$$E\left[F_{\phi|x}^{-۱}\left(۱-\frac{\alpha}{۲}\right)-\ F_{\phi|x}^{-۱}\left(\frac{\alpha}{۲}\right)\right] \leq l, \quad (۹)$$

صدق کند.

**ج)** متوسط اندازه‌ی اثر $(ESC)$[۳]: در عمل $\phi$ به‌عنوان اندازه‌ی اثر در $p\left(\phi \geq ۰ \middle| x\right)$ (احتمال پسین وجود اندازه‌ی اثر) تفسیر می‌شود. حتی در حالت کلی کمیت $p(\phi \geq \phi^*|x)$ (احتمال پسین وجود اندازه‌ی اثر به اندازه‌ی حداقل $\phi^*$) می‌تواند مد نظر قرار گیرد. آن‌گاه به ازای $\alpha > ۰$ معلوم $n$ای مطلوب است که در رابطه‌ی

$$E[p(\phi \geq \phi^*|x)]\ \geq ۱-\alpha, \quad (۱۰)$$

صدق کند. اما در این‌جا به‌جای استفاده از متوسط احتمال پسین وجود اندازه‌ی اثر، از خود اندازه‌ی اثر استفاده می‌کنیم به این صورت که به ازای $\epsilon_۲ > ۰$ ، در پی $n$ای می‌گردیم که اختلاف بین مقدار واقعی و مقدار براوردشده‌ی آن از $\epsilon_۲$ کم‌تر باشد. به عبارتی دیگر $n$ای بهینه است که در رابطه‌ی زیر صدق کند:

$$|\phi-\phi^*|\ \leq \epsilon_۲. \quad (۱۱)$$

توجه شود که در همه‌ی روابط بالا، امید نسبت به توزیع حاشیه‌ای $x$ است. برای تعیین اندازه‌ی نمونه‌ی بهینه‌ی بیزی ضروری است همه‌ی نامساوی موجود در معیارهای ارایه‌شده برای مدل‌های مختلف دوسطحی حل شده و سپس ترکیب نمونه‌ای مناسب سطوح اول و دوم به‌دست آید.

با اعمال این محدودیت‌های بر توزیع پسین پارامترهای مدل می‌توان اندازه‌ی نمونه‌ی بهینه را تعیین کرد. اما همان‌طور که مشاهده شد توزیع پسین پارامترها در مدل‌های دوسطحی فرم بسته‌ای نداشته، ولی با توجه به وجود فرم بسته برای توزیع شرطی کامل تعیین اندازه‌ی نمونه‌ی بهینه با استفاده از روش‌های عددی و اعمال سه معیار در نظر گرفته شده، صورت می‌گیرد.

## ۴- اندازه‌ی نمونه‌ی بهینه

مطالبی که در ادامه آمده است بنا به نتایج حاصل از شبیه‌سازی با استفاده از الگوریتم گیبز ارایه‌شده برای مدل شیب تصادفی است. مطالعه‌ی شبیه‌سازی بر اساس ۱۰۰۰۰۰ بار نمونه‌گیری با مرحله‌ی داغیدن ۵۰۰۰۰ بار بوده است. سپس از ۵۰۰۰۰ نمونه‌ی گیبز باقیمانده از هر ۵۰ تا یکی انتخاب شده است. لذا در نهایت ۱۰۰۰ نمونه از پارامترهای مورد نظر به‌دست آمد. برای تعیین نمونه‌ی بهینه، اندازه‌ی نمونه‌های گروه و زیرگروه به‌ترتیب به‌صورت ۱۵۰، ۱۰۰، ۸۰، ۴۰، ۲۰، ۱۰، ۵، ۲ = $J$ و ۱۵۰، ۱۰۰، ۸۰، ۴۰، ۲۰، ۱۰، ۵ = $n$ اختیار شد. به علاوه، نوع طرح نمونه‌گیری را متعادل فرض کردیم. با توجه به مدل دوسطحی (۶)، برای هر ترکیب از اندازه‌ی نمونه معیارهای عملکرد مدل را به ازای $\epsilon_1 = ۱$، $l = ۳$ و $\epsilon_2 = ۰/۵$ بررسی خواهیم نمود و در نهایت بر اساس اعمال هم‌زمان این سه محدودیت اندازه‌ی نمونه‌ی بهینه در دوسطح ارایه می‌شود. در واقع ترکیب نمونه‌ای که در این سه معیار صدق کند به‌عنوان اندازه‌ی نمونه‌ی بهینه در سطح اول و دوم تعیین می‌شود. برای جلوگیری از افزایش حجم مطالب در مقاله‌ی حاضر تنها به ارایه‌ی نتایج حاصل از یکی از اثرات ثابت و یکی از اثرات تصادفی می‌پردازیم و اندازه‌ی نمونه‌ی بهینه را با استفاده از همه‌ی اثرات ثابت و تصادفی ارایه می‌کنیم.

جداول ۱ و ۲، شامل سه معیار عملکرد مدل ($APVC, ALC$ و $ESC$) به ترتیب بر اساس اثر تصادفی سطح دوم ($\sigma^2_{u_0}$) و اثرات ثابت شیب ($\beta_1$) می‌باشد. بخش اول جدول ۱ متوسط واریانس پسین پارامتر $\sigma^2_{u_0}$ را برای ترکیب‌های مختلف نمونه‌ای در سطح اول و دوم ارایه می‌کند. متوسط واریانس پسین $\sigma^2_{u_0}$ به ازای تعداد گروه‌های کم بسیار بزرگ بوده و تعداد زیرگروه‌ها تأثیر چشمگیری روی متوسط واریانس پسین $\sigma^2_{u_0}$ ندارد. با توجه به این جدول مشاهده می‌شود هنگامی که تعداد زیرگروه ثابت است، با افزایش تعداد گروه‌ها متوسط واریانس پسین کاهش می‌یابد. به علاوه، ملاحظه می‌شود با توجه به رابطه‌ی (۸) و بر اساس $\epsilon_1 = ۱$ به ازای هر تعداد زیرگروه بیش‌تر از ۵، حداقل

تعداد گروه مورد نیاز برابر ۴۰ است. اما هنگامی که تعداد زیرگروه برابر ۵ اختیار شود تعداد گروه مورد نیاز ۸۰ و بیش‌تر از آن است. لذا می‌توان نتیجه گرفت که حداقل تعداد نمونه‌ی کل مورد نیاز به‌منظور برقراری رابطه‌ی (۸)، برابر ۴۰۰ خواهد بود. بر اساس قسمت دوم جدول ۱ مشاهده می‌شود که هر چقدر تعداد گروه بیش‌تر شود طول فاصله‌ی اطمینان کاهش می‌یابد اما افزایش یا کاهش تعداد زیرگروه تأثیری بر روند مشخص روی متوسط طول فاصله‌ی اطمینان ندارد. کوچک‌ترین فاصله‌ی اطمینان مربوط به ترکیب $\{J=۱۵۰$ و $n=۱۵۰\}$ است. با توجه به رابطه‌ی معیار متوسط طول فاصله‌ی اطمینان (رابطه‌ی ۹) و بر اساس تعداد زیرگروه مشخص تعداد گروه لازم متفاوت خواهد بود. زمانی که اندازه‌ی زیرگروه ۵ است، تعداد گروه لازم برای دستیابی به نتیجه‌ی مطلوب باید ۸۰ و بیش‌تر از ۸۰ باشد. زمانی که تعداد زیرگروه‌ها ۱۰ و بیش‌تر از آن باشند، حداقل تعداد گروه مورد نیاز۴۰ خواهد بود.

بخش دوم جدول ۲، شامل مقادیر متوسط طول فاصله‌ی اطمینان پارامتر $\beta_۱$ برای ترکیب‌های مختلف نمونه‌ای در سطح اول و دوم است. همان‌طور که از این جدول مشاهده می‌شود، با افزایش تعداد گروه‌ها برای هر تعداد زیرگروه مشخص طول فاصله‌ی اطمینان کم می‌شود. بر اساس رابطه‌ی (۹) که محدودیت معیار متوسط طول فاصله‌ی اطمینان است می‌توان ادعا کرد که اگر تعداد زیرگروه‌ها حداکثر ۴۰ باشد حداقل تعداد گروه مورد نیاز برابر ۲۰ خواهد بود. به ازای تعداد زیرگروه بیش‌تر از ۴۰ تعداد گروه‌های ضروری باید ۱۰ و بیش‌تر از آن باشند. بخش سوم جدول ۲ اندازه‌ی اثر پارامتر شیب را برای ترکیب‌های مختلف نمونه‌ای نشان می‌دهد. با توجه به بخش سوم این جدول مشاهده می‌شود که روند مشخصی بین افزایش یا کاهش اندازه‌ی نمونه چه در سطح اول و چه در سطح دوم با میزان اریبی وجود ندارد. نکته‌ی مهم حاصل از نتایج این جدول این است که با توجه به $\epsilon_۲=۰/۵$ در رابطه‌ی (۱۰) حداقل تعداد گروه مورد نیاز برای رسیدن به اندازه‌ی اثر کم‌تر از ۰/۵ در نظر گرفتن حداقل ۴۰ گروه به ازای هر تعداد زیرگروه است.

جدول ۱- معیارهای عملکرد بیزی اثر تصادفی $\sigma^{2}_{u_0}$

| معیارهای عملکرد | زیرگروه | تعداد گروه | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | ۲ | ۵ | ۱۰ | ۲۰ | ۴۰ | ۸۰ | ۱۰۰ | ۱۵۰ |
| **APVC** | ۵ | ۱۵۴۵ | ۴۸۰ | ۶۴/۳ | ۵/۴۵ | ۲/۲۵ | ۰/۶۹ | ۰/۲۷ | ۰/۲۷ |
| | ۱۰ | ۱۷۳۹ | ۲۱۲ | ۳۵/۷ | ۲/۲۴ | ۰/۶۵ | ۰/۴۱ | ۰/۲۹ | ۰/۲۱ |
| | ۲۰ | ۱۱۴۶ | ۵۳۳ | ۵۸/۹ | ۱/۳۲ | ۰/۳۵ | ۰/۲۶ | ۰/۲۳ | ۰/۱۳ |
| | ۴۰ | ۱۲۸۳ | ۳۱۷ | ۱۵/۷ | ۴/۴۳ | ۰/۹۹ | ۰/۴۱ | ۰/۲۲ | ۰/۱۵ |
| | ۸۰ | ۱۲۷۶ | ۶۸۰ | ۱۲/۹ | ۲/۵۲ | ۰/۸۸ | ۰/۲۲ | ۰/۲۰ | ۰/۱۲ |
| | ۱۰۰ | ۱۰۱۳ | ۱۴۷ | ۶/۰۷ | ۱/۳۱ | ۰/۲۳ | ۰/۲۳ | ۰/۱۳ | ۰/۱۲ |
| | ۱۵۰ | ۱۲۷۹ | ۵۸۶ | ۳/۸۶ | ۱/۲۲ | ۰/۶۸ | ۰/۳۰ | ۰/۱۷ | ۰/۱۲ |
| **ALC** | ۵ | ۴۷۳ | ۸۵/۸ | ۳۱/۴ | ۹/۱۵ | ۵/۸۸ | ۲/۰۳ | ۲/۵۲ | ۲/۰۴ |
| | ۱۰ | ۶۱۷ | ۵۷/۱ | ۲۳/۴ | ۵/۸۵ | ۳/۰۷ | ۲/۴۹ | ۲/۱۰ | ۱/۸۱ |
| | ۲۰ | ۸۴۲ | ۹۰/۵ | ۳۰/۱ | ۴/۵۰ | ۲/۳۱ | ۲/۰۲ | ۱/۸۷ | ۱/۴۴ |
| | ۴۰ | ۴۳۴ | ۶۹/۸ | ۱۵/۵ | ۸/۲۵ | ۲/۹۳ | ۲/۵۰ | ۱/۸۵ | ۱/۵۳ |
| | ۸۰ | ۸۹۶ | ۷۲/۴ | ۱۴/۴ | ۶/۲۲ | ۲/۶۹ | ۱/۸۴ | ۱/۷۵ | ۱/۳۷ |
| | ۱۰۰ | ۷۷۱ | ۴۷/۶ | ۹/۶۶ | ۴/۴۸ | ۱/۸۹ | ۲/۱۲ | ۱/۴۴ | ۱/۴۱ |
| | ۱۵۰ | ۵۷۵ | ۹۴/۹ | ۷/۷۰ | ۴/۳۳ | ۲/۲۴ | ۲/۱۴ | ۱/۶۰ | ۱/۳۷ |
| **ESC** | ۵ | ۳۸/۲ | ۱۱/۳ | ۷/۵۲ | ۴/۸۶ | ۱/۵۳ | ۱/۰۶ | ۰/۹۳ | ۰/۳۱ |
| | ۱۰ | ۴۹/۵ | ۷/۱۵ | ۵/۶۵ | ۳/۱۶ | ۱/۳۶ | ۰/۴۵ | ۰/۳۲ | ۰/۲۱ |
| | ۲۰ | ۴۰/۵ | ۱۱/۵ | ۵/۶۲ | ۳/۱۲ | ۱/۳۱ | ۰/۳۸ | ۰/۲۰ | ۰/۱۹ |
| | ۴۰ | ۳۰/۶ | ۹/۵۸ | ۳/۷۲ | ۲/۸۶ | ۱/۰۹ | ۰/۳۴ | ۰/۱۸ | ۰/۱۶ |
| | ۸۰ | ۲۹/۲ | ۲۰/۳ | ۲/۹۳ | ۱/۲۹ | ۰/۹۰ | ۰/۲۱ | ۰/۱۵ | ۰/۱۳ |
| | ۱۰۰ | ۳۲/۹ | ۶/۶۳ | ۱/۲۴ | ۰/۵۵ | ۰/۴۹ | ۰/۱۴ | ۰/۱۳ | ۰/۱۱ |
| | ۱۵۰ | ۳۳/۴ | ۵/۲۳ | ۰/۶۵ | ۰/۵۴ | ۰/۴۶ | ۰/۱۳ | ۰/۱۲ | ۰/۰۵ |

**جدول ۲- معیارهای عملکرد بیزی اثر ثابت**

| معیارهای عملکرد | زیرگروه | تعداد گروه | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | ۲ | ۵ | ۱۰ | ۲۰ | ۴۰ | ۸۰ | ۱۰۰ | ۱۵۰ |
| **APVC** | ۵ | ۶/۹۲ | ۲/۶۰ | ۰/۷۰ | ۰/۴۲ | ۰/۱۸۷ | ۰/۰۶۰ | ۰/۰۴۴ | ۰/۰۳۸ |
| | ۱۰ | ۹/۱۴ | ۱/۱۸ | ۰/۶۶ | ۰/۱۷ | ۰/۱۳۳ | ۰/۰۶۳ | ۰/۰۴۵ | ۰/۰۲۷ |
| | ۲۰ | ۷/۷۸ | ۵/۴۷ | ۰/۷۹ | ۰/۱۸ | ۰/۱۴۰ | ۰/۰۷۳ | ۰/۰۶۸ | ۰/۰۳۵ |
| | ۴۰ | ۶/۱۸ | ۳/۵۴ | ۰/۶۰ | ۰/۵۵ | ۰/۱۷۱ | ۰/۰۶۲ | ۰/۰۲۸ | ۰/۰۲۵ |
| | ۸۰ | ۳/۶۴ | ۱/۳۵ | ۰/۴۳ | ۰/۲۴ | ۰/۰۷۰ | ۰/۰۳۶ | ۰/۰۳۳ | ۰/۰۱۷ |
| | ۱۰۰ | ۳/۱۷ | ۱/۱۶ | ۰/۵۶ | ۰/۲۱ | ۰/۰۹۵ | ۰/۰۶۴ | ۰/۰۳۹ | ۰/۰۳۷ |
| | ۱۵۰ | ۲/۹۷ | ۱/۱۰ | ۰/۲۶ | ۰/۲۴ | ۰/۰۲۹ | ۰/۰۲۱ | ۰/۰۲۰ | ۰/۰۲۰ |
| **ALC** | ۵ | ۱۰/۳۲ | ۶/۳۲ | ۳/۲۷ | ۲/۵۴ | ۱/۷۰ | ۰/۹۶ | ۰/۸۲ | ۰/۷۶ |
| | ۱۰ | ۱۳/۶۶ | ۴/۲۶ | ۳/۱۸ | ۲/۳۰ | ۱/۴۳ | ۰/۹۷ | ۰/۸۳ | ۰/۷۱ |
| | ۲۰ | ۱۰/۹۴ | ۹/۱۷ | ۳/۴۸ | ۱/۹۹ | ۱/۴۷ | ۰/۹۶ | ۰/۷۲ | ۰/۶۴ |
| | ۴۰ | ۹/۷۴ | ۷/۳۸ | ۳/۰۵ | ۱/۹۱ | ۱/۶۲ | ۰/۹۷ | ۰/۶۶ | ۰/۶۲ |
| | ۸۰ | ۷/۴۸ | ۴/۵۵ | ۲/۵۷ | ۱/۹۰ | ۱/۰۴ | ۰/۷۴ | ۰/۶۱ | ۰/۵۹ |
| | ۱۰۰ | ۶/۹۸ | ۴/۲۳ | ۲/۵۴ | ۱/۸۰ | ۱/۲۱ | ۰/۷۸ | ۰/۶۱ | ۰/۳۰ |
| | ۱۵۰ | ۶/۷۵ | ۴/۱۱ | ۱/۹۹ | ۱/۹۳ | ۰/۷۸ | ۰/۶۸ | ۰/۴۰ | ۰/۲۶ |
| **ESC** | ۵ | ۳/۱۶ | ۱/۰۵ | ۰/۸۶ | ۰/۷۷ | ۰/۵۶ | ۰/۱۵ | ۰/۱۶ | ۰/۱۰ |
| | ۱۰ | ۳/۰۲ | ۱/۴۸ | ۰/۸۰ | ۰/۶۴ | ۰/۵۰ | ۰/۱۳ | ۰/۱۱ | ۰/۰۵ |
| | ۲۰ | ۱/۵۵ | ۱/۴۰ | ۰/۹۳ | ۰/۹۰ | ۰/۱۵ | ۰/۱۰ | ۰/۰۷ | ۰/۰۷ |
| | ۴۰ | ۴/۵۸ | ۴/۳۴ | ۰/۸۰ | ۰/۷۵ | ۰/۴۰ | ۰/۱۵ | ۰/۰۷ | ۰/۰۷ |
| | ۸۰ | ۳/۹۳ | ۲/۴۱ | ۰/۶۹ | ۰/۵۷ | ۰/۱۰ | ۰/۱۰ | ۰/۰۹ | ۰/۰۸ |
| | ۱۰۰ | ۳/۸۹ | ۲/۳۸ | ۱/۴۱ | ۰/۵۶ | ۰/۴۹ | ۰/۱۰ | ۰/۰۴ | ۰/۰۳ |
| | ۱۵۰ | ۱/۹۹ | ۱/۹۰ | ۱/۷۴ | ۰/۵۱ | ۰/۲۲ | ۰/۱۷ | ۰/۰۳ | ۰/۰۰۲ |

## ۵- بحث و نتیجه‌گیری

تحلیل و تعمیم مدل‌های چندسطحی، به خاطر کاربرد وسیع آن در علوم مختلف، بیش از پیش مورد توجه قرار گرفت. اما، تعیین اندازه‌ی نمونه‌ی بهینه در این مدل‌ها و به‌ویژه با رویکرد بیزی کم‌تر مورد اقبال محققین بود و هست. در این مقاله با توجه به محدودیت‌های ارایه‌شده بر اساس هر پارامتر مدل طرح بهینه برای مدل شیب تصادفی ارایه شد. اگر محققی بخواهد طرح بهینه را برای هر مدل با در نظر گرفتن همه‌ی پارامترهای موجود در مدل تعیین کند، پیش‌نهاد ما به‌صورت زیر خواهد بود: طرح بهینه در مدل شیب تصادفی بدون در نظر گرفتن اثر تصادفی سطح دوم $\sigma_{01}$ به این صورت است که به ازای حداقل ۲۰ زیرگروه مدل شامل ۴۰ گروه باشد. اما برای تعداد زیرگروه کم‌تر از ۲۰ حداقل ۸۰ گروه در نظر گرفته شود.

در صورت وجود تابع هزینه‌ی معقول و قابل استفاده برای مدل‌های دوسطحی، دخالت آن در تعیین اندازه‌ی نمونه‌ی بهینه با رویکرد بیزی می‌تواند موضوع تحقیق مناسبی باشد. پیاده‌سازی معادلات اقتصادی در کنار مدل‌های دوسطحی نیز می‌تواند ایده‌ی تحقیقاتی جالب توجهی باشد.

## توضیحات

1. Average Posterior Variance Criterion
2. Average Length Criterion
3. Effect Size Criterion

## مرجع‌ها


[1] Browne, W.J. (1998). Applying MCMC Methods to Multilevel Models, PHD Thesis, University of Bath.

[2] Browne, W.J. (2009). MCMC Estimation in MLwiN(Version 2.10), Center for Multilevel Modeling, University of Bristol.

[3] Browne, W.J., Golalizadeh, M. and Parker, R. (2009). Guide to Sample Size Calculations for Random Effect Models via Simulation and MLPowSim Software Package, Bristol: Bristol University Press.

[4] Cohen, M. (1998). Determining Sample Sizes for Surveys with Data Analyzed by Hierarchical Linear Models, *Journal of Official Statistics*, **14**, 267-275.

[5] Gelman, A. and Hill, J. (2007). *Data Analysis Using Regression and Multilevel/Hierarchical Models*, Cambridge University Press, Cambridge.

[6] Goldstein, H. (2010). *Multilevel Statistical Models*, (4th Edition). Amold Publishing, London.

[7] Goldstein, H. (1986). Multilevel Mixed Linear Model Analysis Using Iterative Generalized Least Squares, *Biometrika*, **73**, 43-56.

[8] Seltzer, M.H. (1993). Sensitivity Analysis for Fixed Effects in the Hierarchical Model: Gibbs Sampling Approach, *Journal of Educational Statistics*, **18**, 207-236.

[9] Seltzer, M.H., Wong, W. and Bryk, A. (1996). Bayesian Analysis in Applications of Hierarchical Models: Issues and Methods, *Journal of Educational and Behavioral Statistics*, **21**, 131-167.

[10] Spiegelhalter, D.J. (2001). Bayesian Methods for Cluster Randomized Trails with Continuous Responses, *Journal of Statistics in Medicine*, **20**, 435-452.

[11] Snijder, T.A.B. and Bosker, R.J. (1999). *Multilevel Analysis: An Introduction to Basic and Advanced Multilevel Modeling*, Sage Publications, London.

[12] Wang, F. and Gelfand, A.E. (2002). A Simulation-Based Approach to Bayesian Sample Size Determination for Performance under a Given Model and for a Separating Models, *Journal of Statistical Science*, **17**, 193-208.

[13] Zeger, S.L. and Karim, M.R. (1991). Generalized Linear Models with Random Effects; Gibbs Sampling Approach, *Journal of American Statistical Society*, **86**, 79–102.

**امید اخگری**
دانشجوی دکتری آمار
تهران، بزرگراه جلال آل احمد، دانشگاه تربیت مدرس، دانشکده‌ی علوم ریاضی، گروه آمار.
رایانشانی: o.akhgari@gmail.com

**موسی گل‌علیزاده**
دکتری آمار
تهران، بزرگراه جلال آل احمد، دانشگاه تربیت مدرس، دانشکده‌ی علوم ریاضی، گروه آمار.
رایانشانی: golalizadeh@modares.ac.ir