گزیده‌مطالب آماری
سال ۱۹، شماره‌ی ۲، پاییز و زمستان ۱۳۸۷، صص ۲۲۳-۲۰۹

تحلیل بیزی با استفاده از رایانه

پرویز نصیری

دانشگاه پیام نور

چکیده. تحلیل بیز با انتخاب یک توزیع پیشین که معمولاً از دانش قبلی ما درباره‌ی پارامتر به دست می‌آید، شروع می‌شود. توزیع مناسب روی فضای پارامتر انتخاب و بر اساس آن توزیع پسین به‌صورت قطعی یا تقریبی براورد می‌گردد. در این مقاله روشی تقریبی مبتنی بر رایانه معرفی می‌گردد که در آن نمونه‌ای به حجم بزرگ از توزیع پیشین تولید و با استفاده از آن و تابع درستنمایی و با تکرار آن، نمونه‌ای از توزیع پسین برای براورد پارامتر(های) توزیع پسین تولید می‌گردد. گاهی با توجه به فرم تابع چگالی توأم دو یا چند متغیره از روش تقریبی نمونه‌گیری گیبس نیز استفاده می‌شود. در این مقاله این روش‌های تقریبی مرور و با چندین مثال به کار گرفته می‌شوند.

۱- مقدمه

اسمیت و گلفند [۴] دو روش برای تولید نمونه‌ی تصادفی از توزیع پسین ارائه دادند. در این روش‌ها نمونه‌های بزرگی از توزیع پیشین $\pi(\theta)$ با استفاده از رایانه تولید و با استفاده از آن‌ها و تابع درستنمایی نمونه‌ای از توزیع پسین تقریبی، برای توزیع واقعی پسین $\pi(\theta|x)$، تولید می‌شود. نمونه‌گیری گیبس یکی دیگر از شیوه‌هایی است که با استفاده از رایانه برای کامل کردن تحلیل توزیع پسین در یک موقعیت خاص مورد استفاده قرار می‌گیرد.

در این مقاله در بخش اول روش‌های تولید نمونه‌ی تصادفی از توزیع پسین بحث و در انتها مثال‌هایی جهت معرفی بهتر روش‌ها ارائه خواهد شد. در بخش دوم روش

واژگان کلیدی: توزیع پیشین؛ توزیع پسین؛ تحلیل بیز؛ نمونه‌گیری گیبس.
دریافت: ۱۳۸۷/۸/۲۷، پذیرش: ۱۳۸۸/۷/۵

نمونه‌گیری گیبس معرفی و با استفاده از آن براورد تابع چگالی توزیع پسین ارائه می‌شود.

۲- تولید نمونه از توزیع پسین

در این بخش دو روش برای تولید نمونه از توزیع پسین ارائه می‌شود و در انتها نمونه‌هایی از توزیع مفروض تولید خواهد شد.

۱-۲- روش اول

فرض کنید f یک تابع انتگرال‌پذیر غیرمنفی باشد، به‌طوری که

$$f(x) \propto h(x)$$

که در آن $h(x)$ یک تابع چگالی احتمال است (یعنی $\int_{-\infty}^{\infty} h(x)dx = ۱$). تابع چگالی احتمال $g(x)$ را با شرایط زیر در نظر می‌گیریم.

الف- تکیه‌گاه $g(x)$ شامل تکیه‌گاه $f(x)$ باشد.

ب- تولید مشاهدات از $g(x)$ با استفاده از رایانه آسان باشد.

پ- یک عدد معلوم M وجود داشته باشد به‌طوری که $f(x) \le M$.

برای تولید مشاهدات، الگوریتم زیر را در نظر می‌گیریم.

۱- یک مشاهده‌ی x از $g(x)$ و مشاهده‌ی u مستقل از x از توزیع یکنواخت روی بازه‌ی $(۰,۱)$ تولید می‌کنیم.

۲- اگر $u \le \frac{f(x)}{Mg(x)}$ باشد، مشاهده‌ی x به‌عنوان یک مشاهده انتخاب و ذخیره می‌شود. در غیر این صورت زوج (x,u) نادیده گرفته شده و مجدداً از مرحله‌ی ۱ تکرار می‌شود. بعد از تکرار مراحل ۱ و ۲ می‌توان نمونه‌ای به حجم n تولید نمود. با استفاده از استدلال زیر می‌توان نشان داد که اگر Y یک مشاهده‌ی انتخاب شده باشد تابع چگالی آن $h(\cdot)$ خواهد بود [۳].

$$P(Y \le y) = P\left[X \le y \,\middle|\, u \le \frac{f(x)}{Mg(x)}\right]$$

$$= \frac{P\left[X \le y, u \le \frac{f(x)}{Mg(x)}\right]}{P\left[u \le \frac{f(x)}{Mg(x)}\right]}$$

$$= \frac{\int_{-\infty}^{y} P\left[u \le \frac{f(x)}{Mg(x)}\right] g(x)\,dx}{\int_{-\infty}^{\infty} P\left[u \le \frac{f(x)}{Mg(x)}\right] g(x)\,dx}$$

حال از آن‌جا که متغیر تصادفی u یکنواخت است، داریم

$$P(Y \le y) = \frac{\int_{-\infty}^{y} \frac{f(x)}{Mg(x)} g(x)\,dx}{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{Mg(x)} g(x)\,dx}$$

$$= \frac{\int_{-\infty}^{y} f(x)\,dx}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx} = \int_{-\infty}^{y} h(x)\,dx$$

بنا بر این Y دارای تابع چگالی احتمال $h(x)$ است.

برای تحلیل بیزی با توزیع پیشین $\pi(\theta)$ و تابع درستنمایی $L(x|\theta)$ توابع $f(\theta)$ و $g(\theta)$ را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم.

$$f(\theta) = L(x|\theta)\,\pi(\theta), \qquad g(\theta) = \pi(\theta)$$

اگر $\hat{\theta}$ یک براوردگر ماکسیمم درستنمایی باشد،

$$f(\theta) = L(x|\theta)\,\pi(\theta) \le L(x|\hat{\theta})\,g(\theta).$$

بنا بر این با اختیار $M = L(x|\hat{\theta})$،

$$\frac{f\left(\theta\right)}{Mg\left(\theta\right)}=\frac{f\left(x\left|\theta\right.\right)\pi\left(\theta\right)}{f\left(x\left|\hat{\theta}\right.\right)\pi\left(\theta\right)}=\frac{f\left(x\left|\theta\right.\right)}{f\left(x\left|\hat{\theta}\right.\right)}$$

برای استفاده از الگوریتم بالا یک مشاهده از $\pi\left(\theta\right)$ تولید و مقدار $\frac{f\left(x\left|\theta\right.\right)}{f\left(x\left|\hat{\theta}\right.\right)}$ را محاسبه کرده و آن را با یک مشاهده‌ی مستقل از توزیع یکنواخت روی $(۰,۱)$ مقایسه و نسبت به قبول یا رد زوج $\left(\theta,u\right)$ تصمیم‌گیری می‌کنیم. با تکرار مراحل اخیر می‌توان یک نمونه به حجم دلخواه از توزیع پسین تولید کرد.

مثال: فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی برنولی با پارامتر θ باشد و توزیع پیشین $\pi\left(\theta\right)=۲\theta$ ، $۰<\theta<۱$ در نظر گرفته شود. بنا بر این

$$f\left(x\left|\theta\right.\right)=\theta^{x}\left(۱-\theta\right)^{۱-x}, \qquad x=۰,۱ \quad , \quad ۰<\theta<۱$$

اگر $x_۱$، $x_۲$، ...، x_n نمونه‌ی مشاهده شده باشد

$$L\left(x\left|\theta\right.\right)=\theta^{n\bar{x}}\left(۱-\theta\right)^{n-n\bar{x}}$$

$$L\left(x\left|\hat{\theta}\right.\right)=\left(\hat{\theta}\right)^{n\bar{x}}\left(۱-\hat{\theta}\right)^{n-n\bar{x}}, \qquad \hat{\theta}=\bar{X}$$

یک مشاهده از $\pi\left(\theta\right)=۲\theta$ با استفاده از تابع توزیع $F\left(\theta\right)=\theta^{۲}$ تولید می‌کنیم. از آن‌جا که $۰\le F\left(\theta\right)\le ۱$ است

$$F\left(\theta\right)=\theta^{۲}=u \quad \Rightarrow \quad \theta=\sqrt{u}\ .$$

با فرض این که عدد تولیدشده‌ی بین صفر و یک برابر با ۰/۰۴ باشد، نتیجه می‌شود $\theta=\sqrt{۰/۰۴}=۰/۲$. در این صورت

$$f\left(x\left|\theta\right.\right)=f\left(x\left|۰/۲\right.\right)=\left(۰/۲\right)^{x}\left(۱-۰/۲\right)^{۱-x} \quad , \quad x=۰,۱$$

یک نمونه‌ی بیست تایی از $f\left(x\left|۰/۲\right.\right)$ می‌توان به‌صورت زیر تولید نمود.

۰ ۰ ۱ ۱ ۱ ۰ ۰ ۱ ۰ ۰ ۰ ۰ ۱ ۱ ۰ ۰ ۰ ۰ ۰ ۱

$$\hat{\theta}=\bar{X}=\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}x_i=\frac{۷}{۲۰}=۰/۳۵$$

$$L\left(x\left|۰/۲\right.\right)=\theta^{n\bar{x}}\left(۱-\theta\right)^{n-n\bar{x}}=\left(۰/۲\right)^{۲۰(۰/۳۵)}\left(۱-۰/۲\right)^{۲۰-۲۰(۰/۳۵)}$$
$$=\left(۰/۲\right)^{۷}\left(۰/۸\right)^{۱۳}$$

$$L\left(x\left|\hat{\theta}\right.\right)=L\left(x\left|۰/۳۵\right.\right)=\left(۰/۳۵\right)^{۷}\left(۱-۰/۳۵\right)^{۱۳}$$

$$\frac{L\left(x\left|\theta\right.\right)}{L\left(x\left|\hat{\theta}\right.\right)}=\left(\frac{۰/۲}{۰/۳۵}\right)^{۷}\left(\frac{۰/۸}{۰/۶۵}\right)^{۱۳}=۰/۲۹۵۸$$

حال یک مشاهده به تصادف از توزیع یکنواخت روی بازه‌ی $(۰,۱)$ تولید می‌کنیم. فرض کنید $u=۰/۱۶۷۰$ مشاهده شده باشد. چون $u<\frac{L(x|\theta)}{L(x|\hat{\theta})}=۰/۲۹۵۸$ است زوج $(\theta,u)=(۰/۲,۰/۱۶۷۰)$ انتخاب می‌شود بنا بر این $\theta=۰/۲$ به‌عنوان نمونه از توزیع پسین انتخاب می‌شود.

حال فرض کنید برای $\theta=۰/۲$ نمونه‌ی مشاهده شده به حجم ۲۰ از $f\left(x\left|۰/۲\right.\right)$ به‌صورت زیر باشد.

۰ ۱ ۰ ۱ ۰ ۰ ۱ ۰ ۰ ۱ ۰ ۰ ۱ ۰ ۰ ۰ ۰ ۱ ۰ ۰

$$\hat{\theta}=\bar{X}=\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}X_i=\frac{۶}{۲۰}=۰/۳$$

$$L\left(x\left|۰/۲\right.\right)=\theta^{n\bar{X}}\left(۱-\theta\right)^{n-n\bar{X}}=\left(۰/۲\right)^{۶}\left(۱-۰/۲\right)^{۱۴}=\left(۰/۲\right)^{۶}\left(۰/۸\right)^{۱۴}$$

$$L\left(x\left|\hat{\theta}\right.\right)=\hat{\theta}^{n\bar{X}}\left(۱-\hat{\theta}\right)^{n-n\bar{X}}=\left(۰/۳\right)^{۶}\left(۱-۰/۳\right)^{۱۴}=\left(۰/۳\right)^{۶}\left(۰/۷\right)^{۱۴}$$

$$\frac{L\left(x\left|۰/۲\right.\right)}{L\left(x\left|\hat{\theta}=۰/۳\right.\right)}=\frac{\left(۰/۲\right)^{۶}\left(۰/۸\right)^{۱۴}}{\left(۰/۳\right)^{۶}\left(۰/۷\right)^{۱۴}}=\left(\frac{۲}{۳}\right)^{۶}\left(\frac{۸}{۷}\right)^{۱۴}=۰/۵۶۹۳$$

اگر مشاهده‌ی نمونه‌ی تصادفی از بازه‌ی $(۰,۱)$ برابر با ۰/۵۶۹۶ باشد زوج $(۰/۲,۰/۵۶۹۳)$ انتخاب نمی‌شود.

از این روش وقتی استفاده می‌شود که θ به‌روش ماکسیمم درستنمایی قابل براورد باشد در غیر این صورت از روش دوم که در ذیل بحث خواهد شد، استفاده می‌شود.

۲-۲- روش دوم

در این روش یک نمونـه بـه حجـم n (بـزرگ) از توزیـع پیـشین تولیـد مـی‌شـود. اگـر $\theta_1، \theta_2، \ldots، \theta_n$ نمونه‌ی تولید شده باشد، متغیر W_i به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$W_i = \frac{L\left(x \,|\theta_i\right)}{\sum_{i=1}^{n} L\left(x \,|\theta_i\right)} = \frac{\prod_{j=1}^{n} f\left(x_j \,|\theta_i\right)}{\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n} f\left(x_j \,|\theta_i\right)}$$

اگر θ^* یک متغیر تصادفی گسسته باشد و مقادیر $\theta_1، \theta_2، \ldots، \theta_n$ را به‌ترتیب با احتمالات $W_1، W_2، \ldots، W_n$ اختیار کند آنگاه

θ_0	θ_1	θ_2	$\ldots$	θ_n
$P\left(\theta^* = \theta_0\right)$	W_1	W_2	$\ldots$	W_n

و

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\theta^* \le \theta_0\right) = \frac{\int_{-\infty}^{\theta_0} L\left(x|\theta\right)\pi\left(\theta\right)d\theta}{\int_{-\infty}^{\infty} L\left(x|\theta\right)\pi\left(\theta\right)d\theta}$$

برای n بزرگ، توزیع θ^* یک توزیع تقریبی برای توزیع پسین است.

اثبات:

$$P\left(\theta^* \le \theta_0\right) = \sum_{\theta_i \le \theta_0} \frac{L\left(x \,|\theta_i\right)}{\sum L\left(x \,|\theta_i\right)} \qquad (1)$$

$$= \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} L\left(x \,|\theta_i\right) I_{[\theta_i \le \theta_0]}^{(\theta_i)}}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} L\left(x \,|\theta_i\right)}$$

چون θ_iها از هم مستقل و هم‌توزیع‌اند $\left(iid\right)$ با اسـتفاده از قـانون قـوی اعـداد بـزرگ برای صورت و مخرج کسر اخیر داریم

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\theta^* \le \theta_\circ\right) = \frac{\int_{-\infty}^{\theta_\circ} L\left(x\,|\theta\right)\pi\left(\theta\right)d\theta}{\int_{-\infty}^{\infty} L\left(x\,|\theta\right)\pi\left(\theta\right)d\theta}.$$

با تولید مشاهدات از توزیع θ^*، یک نمونه از توزیع پسین به دست می‌آید.

مثال: برای مثال قبلی، یک نمونه به حجم $n=۱۰$ از $\pi\left(\theta\right)=۲\theta$ ،$۰<\theta<۱$ تولید می‌کنیم. فرض کنید نمونه‌ی تولید شده به‌صورت زیر باشد.

۰/۲ ۰/۱ ۰/۰۵ ۰/۴ ۰/۲۵ ۰/۶ ۰/۷ ۰/۳ ۰/۸ ۰/۹

تابع توزیع θ^* با توجه به رابطه‌ی (۱) برابر است با

$$G\left(\theta^*\right) = P\left(\theta^* \le \theta_\circ\right) = \frac{\sum_{i=1}^{n} L\left(\underline{x}\,|\theta_i\right) I_{[\theta_i \le \theta_\circ]}^{(\theta_i)}}{\sum_{i=1}^{n} L\left(\underline{x}\,|\theta_i\right)}$$

به ازای مقادیر مختلف θ نمونه‌ای به حجم ۱۰ از $f\left(x\,|\theta\right)$ تولید می‌شود (جدول ۱).

جدول ۱– نمونه‌های به حجم ده به ازای مقادیر مختلف θ از $f\left(x\,|\,\theta\right)$

X_i	θ_i									
	۰/۰۵	**۰/۱**	**۰/۲**	**۰/۲۵**	**۰/۳**	**۰/۴**	**۰/۶**	**۰/۷**	**۰/۸**	**۰/۹**
$x_۱$	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۱	۱	۱
$x_۲$	۰	۰	۰	۰	۱	۱	۰	۱	۱	۱
$x_۳$	۰	۰	۱	۰	۰	۰	۱	۰	۱	۱
$x_۴$	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۱	۱
$x_۵$	۰	۱	۰	۱	۱	۰	۱	۱	۰	۱
$x_۶$	۰	۰	۰	۰	۱	۰	۱	۱	۱	۱
$x_۷$	۰	۰	۱	۱	۰	۰	۰	۱	۱	۱
$x_۸$	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۱	۱	۱	۱
$x_۹$	۰	۰	۰	۱	۰	۰	۱	۱	۱	۱
$x_{۱۰}$	۱	۱	۰	۰	۰	۱	۰	۱	۱	۰
$\sum X_i$	۱	۲	۲	۳	۳	۳	۶	۹	۹	۹

$$L\left(x\left|\theta_i\right.\right)=\prod_{j=۱}^{n} f\left(x_j\left|\theta_i\right.\right)=\theta_i^{\sum_{j=۱}^{n}x_j}\left(۱-\theta_i\right)^{n-\sum_{j=۱}^{n}x_j}$$

$$=\theta_i^{\sum_{j=۱}^{n}x_j}\left(۱-\theta_i\right)^{۱۰-\sum_{j=۱}^{n}x_j} \quad , \quad i=۱,۲,\ldots,۱۰$$

$$L\left(x\left|\theta_۱\right.\right)=L\left(x\left|\theta_۱=۰/۰۵\right.\right)=\left(۰/۰۵\right)^{۱}\left(۰/۹۵\right)^{۹}=۰/۰۳۱۵$$

$$L\left(x\left|\theta_۲\right.\right)=L\left(x\left|\theta_۲=۰/۱\right.\right)=\left(۰/۱\right)^{۲}\left(۰/۹\right)^{۸}=۰/۰۰۴۳$$

$$L\left(x\left|\theta_۳\right.\right)=L\left(x\left|\theta_۳=۰/۲\right.\right)=\left(۰/۲\right)^{۲}\left(۰/۸\right)^{۸}=۰/۰۰۶۷$$

$$L\left(x\left|\theta_۴\right.\right)=L\left(x\left|\theta_۴=۰/۲۵\right.\right)=\left(۰/۲۵\right)^{۳}\left(۰/۷۵\right)^{۷}=۰/۰۲۰۸$$

$$L\left(x\left|\theta_۵\right.\right)=L\left(x\left|\theta_۵=۰/۳\right.\right)=\left(۰/۳\right)^{۳}\left(۰/۷\right)^{۷}=۰/۰۰۲۲$$

$$L\left(x\left|\theta_۶\right.\right)=L\left(x\left|\theta_۶=۰/۴\right.\right)=\left(۰/۴\right)^{۳}\left(۰/۶\right)^{۷}=۰/۰۰۱۷$$

$$L\left(x\left|\theta_۷\right.\right)=L\left(x\left|\theta_۷=۰/۶\right.\right)=\left(۰/۶\right)^{۶}\left(۰/۴\right)^{۴}=۰/۰۰۱۱$$

$$L\left(x\left|\theta_۸\right.\right)=L\left(x\left|\theta_۸=۰/۷\right.\right)=\left(۰/۷\right)^{۹}\left(۰/۳\right)^{۱}=۰/۰۱۲$$

$$L\left(x\left|\theta_۹\right.\right)=L\left(x\left|\theta_۹=۰/۸\right.\right)=\left(۰/۸\right)^{۹}\left(۰/۲\right)^{۱}=۰/۰۲۶۸$$

$$L\left(x\left|\theta_{۱۰}\right.\right)=L\left(x\left|\theta_{۱۰}=۰/۹\right.\right)=\left(۰/۹\right)^{۹}\left(۰/۱\right)^{۱}=۰/۰۳۸$$

θ_i	۰/۰۵	۰/۱	۰/۲	۰/۲۵	۰/۳	۰/۴	۰/۶	۰/۷	۰/۸	۰/۹
$L\left(x\vert\theta_i\right)$	۰/۰۳۱۵	۰/۰۰۴۳	۰/۰۰۶۷	۰/۰۲۰۸	۰/۰۰۲۲	۰/۰۰۱۷	۰/۰۰۱۱	۰/۰۱۲	۰/۰۲۶۸	۰/۰۳۸

$$\sum_{i=۱}^{n} L\left(x\left|\theta_i\right.\right)=۰/۱۴۵۱ \qquad P\left(\theta^*\le\theta_\circ\right)=\frac{\sum_{i=۱}^{n}L\left(x|\theta_i\right)I_{\left[\theta_i\le\theta_\circ\right]}^{\left(\theta_i\right)}}{\sum_{i=۱}^{n}L\left(x|\theta_i\right)}$$

$\theta_\circ$	۰/۰۵	۰/۱	۰/۲	۰/۲۵	۰/۳	۰/۴	۰/۶	۰/۷	۰/۸	۰/۹
$P\left(\theta^*\le\theta_\circ\right)$	۰/۲۱۷۱	۰/۲۴۶۷	۰/۲۹۲۹	۰/۴۳۶۳	۰/۴۵	۰/۴۶۱۸	۰/۴۶۹۳	۰/۵۵۲۰	۰/۷۳۶۷	۱

با توجه به رابطه‌ی تابع توزیع و تابع چگالی احتمال برای متغیر گسسته می‌توان نوشت

$$g\left(\theta^{*}\right)=G\left(\theta^{*}\right)-G\left(\theta^{*}-\right)$$

بنا بر این تابع چگالی پسین $g\left(\theta\left(\underline{X}\right)\right)$ برابر است با

θ^{*}	۰/۰۵	۰/۱	۰/۲	۰/۲۵	۰/۳	۰/۴	۰/۶	۰/۷	۰/۸	۰/۹
$g\left(\theta^{*}\right)$	۰/۲۱۷۱	۰/۰۲۹۶	۰/۰۴۶۲	۰/۱۴۳۴	۰/۰۱۳۷	۰/۰۱۱۸	۰/۰۰۷۵	۰/۰۸۲۷	۰/۱۸۴۷	۰/۲۶۳۳

مثال: اگر متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال دوجمله‌ای با پارامتر θ

$$f\left(x \mid \theta\right)=\binom{n}{x}\theta^{x}\left(۱-\theta\right)^{n-x} \quad , \quad x=۰,۱,۲,\ldots,n$$

و تابع چگالی پیشین بتا با پارامترهای $\beta=۲$ و $\alpha=۳$ باشد،

$$\pi\left(\theta\right)=\frac{\pi\left(\alpha+\beta\right)}{\pi\left(\alpha\right)\pi\left(\beta\right)}\theta^{\alpha-۱}\left(۱-\theta\right)^{\beta-۱}=۳\theta^{۲}\left(۱-\theta\right) \qquad , \qquad ۰<\theta<۱$$

با تولید نمونه‌ای به حجم ۷ از $\pi\left(\theta\right)$ و نمونه‌ای به حجم ۱۰ از $f\left(x\middle|\theta\right)$ تابع چگالی احتمال پسین را به دست آورید.

نمونه‌ی تولید شده از $\pi\left(\theta\right)$ عبارت است از

۰/۹۵۱۶۶۷ ۰/۹۰۴۱۱۴ ۰/۳۹۰۳۰۸ ۰/۸۹۲۴۳۹ ۰/۵۲۹۵۰۹ ۰/۶۱۸۰۲۷ ۰/۷۵۱۵۷۴

به ازای هر θی تولید شده یک نمونه به حجم ۱۰ از $f\left(x\middle|\theta\right)$ تولید شده است (جدول ۲).

با توجه به نمونه‌های تولیدشده $L\left(x\middle|\theta_i\right)=\prod_{j=1}^{n} f\left(x_j\middle|\theta_i\right)$ را محاسبه می‌کنیم

$$L\left(x \mid \theta_i\right)=\prod_{j=۱}^{n} f\left(x \mid \theta_i\right)=\left\{\prod_{j=۱}^{n}\binom{n}{x_j}\theta_i^{x_j}\left(۱-\theta_i\right)^{n-x_j}\right\}$$

$$=\left\{\prod_{j=۱}^{n}\binom{n}{x_j}\right\}\theta_i^{\sum x_j}\left(۱-\theta_i\right)^{\sum\left(n-x_j\right)}$$

$$=\left\{\prod_{j=۱}^{۱۰}\binom{۱۰}{x_j}\right\}\theta_i^{\sum x_j}\left(۱-\theta_i\right)^{\sum\left(۱۰-x_j\right)}$$

$$=\left\{\prod_{j=۱}^{۱۰}\binom{۱۰}{x_j}\right\}\theta_i^{\sum x_j}\left(۱-\theta_i\right)^{۱۰۰-\sum x_i}$$

جدول ۲- نمونه‌های به حجم ده به ازای مقادیر مختلف θ از $f\left(x\mid\theta\right)$

X_i	θ_i						
	۰/۷۵۱۵۷۴	۰/۶۱۸۰۲۷	۰/۵۲۹۵۰۹	۰/۸۹۲۴۳۹	۰/۳۹۰۳۰۸	۰/۹۰۴۱۱۴	۰/۹۵۱۶۶۷
$x_۱$	۷	۴	۵	۸	۴	۱۰	۱۰
$x_۲$	۹	۶	۵	۱۰	۳	۹	۸
$x_۳$	۵	۷	۷	۱۰	۲	۱۰	۸
$x_۴$	۹	۹	۴	۹	۶	۸	۹
$x_۵$	۵	۴	۵	۱۰	۴	۸	۱۰
$x_۶$	۷	۶	۷	۹	۴	۹	۹
$x_۷$	۹	۸	۵	۹	۶	۱۰	۱۰
$x_۸$	۷	۵	۴	۸	۴	۹	۱۰
$x_۹$	۷	۷	۵	۹	۳	۷	۱۰
$x_{۱۰}$	۶	۶	۵	۹	۲	۱۰	۱۰
$\sum^{10} x_i$	۷۱	۶۲	۵۲	۹۱	۳۸	۹۰	۹۴

$$L\left(x\mid\theta_۱\right)=\left\{\prod_{j=۱}^{۱۰}\binom{۱۰}{x_j}\right\}\theta_۱^{\sum_{j=۱}^{n}x_j}\left(۱-\theta_۱\right)^{۱۰۰-\sum_{j=۱}^{n}x_j}$$

$$=\left[۱۲۰\times۱۰\times۲۵۲\times۱۰\times۲۵۲\times۱۲۰\times۱۰\times۱۲۰\times۱۲۰\times۲۱۰\right]\theta_۱^{۷۱}\left(۱-\theta_۱\right)^{۱۰۰-۷۱}$$

$$=۲/۷۶۵۳۱۹\times۱۰^{۱۸}\left(۰/۷۵۱۵۷۴\right)^{۷۱}\left(۱-۰/۷۵۱۵۷۴\right)^{۲۹}$$

$$=۱/۲۴۸۶۷۶\times۱۰^{-۸}$$

$$L\left(x\mid\theta_۲\right)=۹/۶۳۳۳۰۱\times۱۰^{-۹}\qquad L\left(x\mid\theta_۳\right)=۱/۳۶۴۸۳۹\times۱۰^{-۷}$$

$$L\left(x\mid\theta_۴\right)=۰/۰۱۲۴۱۶\qquad L\left(x\mid\theta_۵\right)=۳/۵۳۵۳۸۹\times۱۰^{-۸}$$

$$L\left(x\mid\theta_{۶}\right)=۱/۸۳۳۳۵۱\times ۱۰^{-۶}\qquad L\left(x\mid\theta_{۷}\right)=۲/۴۵۱۷۶۲\times ۱۰^{-۵}$$

$$G\left(\theta^{*}\right)=\frac{\sum_{i=۱}^{۷}L\left(x\mid\theta_{i}\right)I_{(\theta_i\le\theta_{\circ})}^{(\theta_i)}}{\sum_{i=۱}^{۷}L\left(x\mid\theta_{i}\right)}$$

θ	۰/۷۵۱۵۷۴	۰/۶۱۸۰۲۷	۰/۵۲۹۵۰۹	۰/۸۹۲۴۳۹	۰/۳۹۰۳۰۸	۰/۹۰۴۱۱۴	۰/۹۵۱۶۶۷
$G(\theta)$	$۱/۰۰۴\times ۱۰^{-۷}$	$۱/۷۷۵\times ۱۰^{-۶}$	$۱/۲۷۴\times ۱۰^{-۵}$	۰/۹۹۷۰	۰/۹۹۷۵	۰/۹۹۸۰	۱

θ	۰/۷۵۱۵۷۴	۰/۶۱۸۰۲۷	۰/۵۲۹۵۰۹	۰/۸۹۲۴۳۹	۰/۳۹۰۳۰۸	۰/۹۰۴۱۱۴	۰/۹۵۱۶۶۷
$g(\theta)$	$۱/۰۰۴\times ۱۰^{-۷}$	$۱/۶۷۵۶۲\times ۱۰^{-۶}$	$۱/۰۹۶۵\times ۱۰^{-۵}$	۰/۹۹۶۹	۰/۰۰۱	۰/۰۰۰۵	۰/۰۰۲

۳- نمونه‌گیری گیبس و استفاده از آن در تحلیل بیزی

پیشرفت و تکامل روز به روز رایانه و دسترسی آسان به رایانه‌های با سرعت بالا، باعث شده است که روش‌های الگوریتمی، نظیر نمونه‌گیری گیبس، ابزارهای مفید و ضروری برای حل مسائل آماری باشند.

نمونه‌گیری گیبس یک روش الگوریتمی است که ایده‌ی اولیه‌ی آن توسط متروپلیس و همکاران در سال ۱۹۵۳ ارائه گردید و سپس با مقاله‌ای که گیمان و گیمان در مورد مدل‌های پردازش تصویر ارائه دادند، وارد مرحله‌ی جدیدی شد [۱].

در این بخش ابتدا نمونه‌گیری گیبس را شرح می‌دهیم و با استفاده از آن برای براورد پارامتر (پارامترها)، توزیع آن را براورد می‌کنیم.

۳-۱- نمونه‌گیری گیبس

فرض کنید متغیرهای تصادفی X و Y دارای تابع چگالی توأم $f\left(x,y\right)$ بوده، به‌طوری که $\left(x,y\right)\in\Omega=\left\{\left(x,y\right)\middle|x\in A\ ,\ y\in B\right\}$ و توابع چگالی شرطی آن‌ها $f\left(x\middle|y\right)$ و $f\left(y\middle|x\right)$ باشند. هدف به دست آوردن تابع چگالی حاشیه‌ای X (یا Y)

است. محاسبه‌ی انتگرال روی فضای نمونه‌ی متغیر Y ممکن است به‌راحتی امکان‌پذیر نباشد یا به عبارت دیگر محاسبه‌ی انتگرال زیر آسان نباشد.

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x|y)\, f(y)\,dy=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy$$

با توجه به معلوم بودن فرم توابع چگالی شرطی X به شرط $Y=y$ و Y به شرط $X=x$ برای تولید یک نمونه به حجم n (بزرگ) الگوریتم زیر را اجرا می‌کنیم.

۱- نمونه‌ی اختیاری (x°,y°) را از فضای نمونه‌ی Ω انتخاب می‌کنیم.

۲- با استفاده از $f(y|x)$ و x°، مشاهده‌ی y^{1} را از $f(y|x^{\circ})$ تولید می‌کنیم.

۳- با استفاده از (x°,y^{1}) و (x°,y°)، مشاهده‌ی x^{1} را از $f(x|y^{\circ})$ تولید می‌کنیم.

۴- با جایگزینی (x^{1},y^{1}) به جای (x°,y°) مراحل ۱ تا ۳ را m مرتبه برای به دست آوردن (x^{m},y^{m}) تکرار می‌کنیم.

۵- برای تولید نمونه‌ی n، $i=1,2,\ldots,n$، (x_i^{m},y_i^{m})، n مرتبه مراحل ۱ تا ۵ را تکرار می‌کنیم.

فرایند اخیر تولید نمونه را، نمونه‌گیری گیبس گویند.

۲-۳- براورد تابع چگالی حاشیه‌ای X

اگر $f(x^{*})$ تابع چگالی حاشیه‌ای X در نقطه‌ی x^{*} باشد، با توجه به روابط بین توابع چگالی حاشیه‌ای و شرطی می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} f(x^{*}) &= \int f(x^{*}|y)\,f(y)\,dy \\ &= E\left[f(X^{*}|y)\right]. \end{aligned}$$

براساس مقادیر مشاهده شده‌ی $i=1,2,\ldots,n$ ، Y_i^{m} براوردگر $f(x^{*})$ برابر است با

$$f\left(x^*\right) \simeq \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n} f\left(x^* \middle| y_i^m\right)$$

$f\left(x^*\right)$ را براورگر تابع چگالی به‌روش نمونه‌گیری گیبس گویند. به دنبال آن $\widehat{E\left(X\right)}$ برابر است با

$$\widehat{E\left(X\right)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E\left(X \middle| Y_i^m\right)$$

روابط اخیر را می‌توان برای تابع چگالی حاشیه‌ای متغیر Y نیز نوشت. برای استفاده از تکنیک نمونه‌گیری گیبس در تحلیل بیزی، فرض کنید تابع چگالی متغیر تصادفی X به پارامتر θ بستگی داشته باشد به‌طوری که θ دارای تابع چگالی و توزیع پسین $\pi\left(\theta|X\right)$ فرم صریح از متغیرها نباشد. برای تولید نمونه‌ی تصادفی به‌روش نمونه‌گیری گیبس، فرض کنید متغیر تصادفی Y با شرایط زیر در دسترس باشد.

الف- فرم توزیع شرطی Y به شرط θ و X معلوم و صریح باشد، به‌طوری که بتوان نمونه‌ای از $g\left(Y|\theta,X\right)$ را تولید کرد.

ب- فرم توزیع شرطی θ به شرط Y و X معلوم و صریح باشد، به‌طوری که بتوان نمونه‌ای از $g\left(\theta|X,Y\right)$ تولید کرد.

با توجه به بند الف و ب توزیع پسین $\pi\left(\theta|X\right)$ از توزیع حاشیه‌ای $\pi\left(\theta,Y|X\right)$ به دست می‌آید و با استفاده از توابع چگالی

۱) $\pi\left(\theta|X,Y\right)$ ۲) $\pi\left(Y|X,\theta\right)$

نمونه‌ی تصادفی از $\pi\left(\theta|X\right)$ با استفاده از روش نمونه‌گیری گیبس تولید می‌شود.

مثال: فرض کنید متغیر تصادفی y دارای تابع چگالی احتمال دوجمله‌ای با پارامترهای x و θ باشد.

$$f\left(y \mid x,\theta\right) = \binom{x}{y}\theta^y\left(۱-\theta\right)^{x-y} \quad , \quad y = ۰,۱,۲,\ldots,x \ ; ۰<\theta<۱$$

برای $x=۱۰$ و $\theta=۰/۲$ نمونه‌ی زیر از این توزیع تولید شده است.

نمونه‌ی تولید شده: ۱ ۱ ۳ ۲ ۱ ۲ ۴ ۴ ۲ ۱

حال فرض کنید متغیر تصادفی θ دارای تابع چگالی احتمال بتـا بـا پارامترهـای x و y باشد؛

$$\pi(\theta|x,y)=\frac{\Gamma(x+y)}{\Gamma(x)+\Gamma(y)}\theta^{x-1}(1-\theta)^{y-1} \quad , \quad 0<\theta<1$$

نمونه‌ای به حجم ۱۰ از این توزیع برای $x=10$ و $y=2$ به‌صورت زیر تولید شده است

نمونه‌ی تولیدشده:	۰/۳۸۹۳۸۰	۰/۸۹۲۱۶۴	۰/۹۱۰۶۲۹	۰/۷۷۸۱۵۵	۰/۸۰۸۴۹۹
	*	*	*	*	۰/۸۷۵۰۴۵

علامت * نمایانگر آن است که نمونه‌ی تولیدشده رؤیت نـشده اسـت. بـا اسـتفاده از روش نمونه‌گیری گیبس آن‌ها را تولید کنید.

بـرای تولیـد نمونـه از $\pi(\theta|x,y)$ بـرای θهـای مختلـف از $f(y|\theta,10)$ چهـار نمونـه به‌صورت زیر تولید می‌کنیم

θ	۰/۱۸	۰/۱۹	۰/۲	۰/۲۱
y تولید شده	۲	۳	۲	۵

به ازای هر مقدار y تولید شده در جدول اخیـر نمونـه‌ای از $\pi(\theta|y,10)$ بـه‌صـورت زیـر تولید می‌کنیم.

x	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰
y	۲	۳	۲	۵
θی تولید شده	۰/۷۰۲۳۳۱	۰/۹۳۲۷۷۳	۰/۹۶۹۳۶۰	۰/۶۸۴۸۵۷

۴- نتیجه‌گیری

تکامل روز افزون رایانه و دسترسی آسان به آن، کاربرد تحلیل بیز در تحلیل داده‌هـای آماری و روش‌های تولید نمونه تصادفی از توزیع پسین در مواقعی که توزیع‌های حاشیه‌ای یا شرطی فرم صریحی ندارند، این موارد در این مقاله مورد بحث قرار گرفتـه و بـا ارائـه‌ی مثال‌ها ضمن تولید نمونه از توزیع پسین، براورد پارامترها به دسـت آمـده اسـت. در ادامـه برای حل مسائل آماری روش‌های نمونه‌گیری گیبس که ابزار مفید و ضروری اسـت ارائـه

شده است. انتظار می‌رود از کاربرد روش‌ها در آمار کاربردی در مراکز مهم از جمله مرکـز آمار مورد استفاده قرار گیرد.

سپاس‌گزاری

بـدین‌وسـیله از داوران مقالـه کـه نظـرات‌شـان موجـب ارتقـاء کیفـی مقالـه گردیـد سپاس‌گزاری می‌شود.

مرجع‌ها

[۱] زال زاده، سعید (۱۳۸۱). نمونه‌گیری گیبس، اندیشه‌ی آماری، سال هفتم، شماره‌ی اول.

[2] Gaman, S.; Gaman D. (1984). Stochastic relaxation, Gibbs distributions and the Bayesian restoration of images. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intelligence*, **6**, 721-741.

[3] Metropolis, N.; Rosenbluth A. W.; Rosenbluth M. N.; Teller A. H.; Teller E. (1953). Equations of State calculations by fant computing methods. *J. Chem. Phys.* **21**, 1087-1091.

[4] Ricpley, B. (1986). *Stochastic Simulation*, New York: John Wiley.

[5] Smith, A. F. M.; Gelfand A. C. (1992). Bayesian Statistics Without Tears: A Sampling Re sampling Perspective, *The Amer. Statist.*, **46**, 84–88.

پرویز نصیری

تهران، دانشگاه پیام‌نور.
پیام‌نگار: