مجله‌ی بررسی‌های آمار رسمی ایران
سال ۳۶، شماره‌ی ۱، بهار و تابستان ۱۴۰۴، صص ۳۹–۵۵

برآورد پارامترهای توزیع سری لگاریتمی وایبول معکوس

پرویز نصیری[*,†] **و امیرعباس آذریان**[‡]

[†] دانشیار گروه آمار دانشگاه پیام نور، تهران

[‡] دانشگاه علوم پزشکی مشهد، مشهد

چکیده. در مدل‌بندی داده‌های بقاء، تعداد مؤلفه‌های توزیع‌های مرکب در زمان‌های شکست نقش اساسی دارند، و به موازات آن تعیین توزیع مناسب برای تعداد مؤلفه‌ها باعث افزایش کارایی برآوردگرها می‌شود. در سال‌های اخیر توزیع‌های زیادی برای تعیین تعداد مؤلفه‌ها توسط پژوهشگران ارائه شده است، که می‌توان از توزیع‌های توزیع دوجمله‌ای، هندسی، پواسن و پواسن بریده شده نام برد. با توجه به اهمیت موضوع، در این مقاله با در نظر گرفتن توزیع سری لگاریتمی برای تعداد مؤلفه‌ها در توزیع وایبول معکوس مرکب، توزیع سری لگاریتمی وابیول معکوس معرفی می‌شود. در ادامه ضمن برآورد پارامترهای آن به روش‌های مختلف با استفاده از شبیه‌سازی، برآوردگرها به کمک معیار میانگین توان دوم خطا مورد مقایسه قرار می‌گیرند. در پایان با استفاده از داده واقعی، برازش توزیع سری لگاریتمی وایبول معکوس بررسی می‌شود.

واژگان کلیدی: توزیع وایبول معکوس مرکب، توزیع سری لگاریتمی، نرخ شکست، برآورد، میانگین توان دوم خطا.

۱- مقدمه

اولین بار توزیع وایبول توسط دانشمند سوئدی، وایبول [۲۳] ارائه گردید. این توزیع و معکوس آن کاربرد وسیعی در پزشکی، تحلیل بقاء، قابلیت اعتماد و غیره دارند. تعمیم‌های مختلف توزیع وایبول و توزیع نمایی توسط ناداراجا و کوتز [۱۶] بیان شده

---

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات

دریافت: ۱۴۰۱/۹/۲۵، پذیرش: ۱۴۰۴/۷/۲۹.

است. محققان بسیاری ازجمله ارتو [۶] نشان دادند که توزیع معکوس وایبول برازش خوبی برای آزمون داده‌های طول عمر گزارش شده به وسیلهٔ نلسون است؛ و از توزیع معکوس وایبول برای تحقیقات خود استفاده کردند. خان و همکاران [۱۲] انعطاف‌پذیری توزیع معکوس وایبول و خواص آن را بررسی نمودند. اخیراً پژوهشگران زیادی، توزیع‌های مختلف طول عمر برای داده‌های مدل طول عمر با نرخ شکست نزولی ارائه داده‌اند که می‌توان به مقالات آدامیدیس و لوکاس [۱] و کاس [۱۶] مراجعه کرد. طهماسبی و رضایی [۲۲] توزیع جدیدی برای توزیع بقا با نرخ شکست از ترکیب توزیع های نمایی و توزیع سری لگاریتمی ارائه دادند و به دنبال آن ترکیبی از توزیع‌ها توسط سوزا و کریبری [۲۰]، محمود و همکاران [۱۵] و چودهوری و همکاران [۳] تحت عنوان تعمیمی از توزیع‌های نمایی پواسون شده، نمایی هندسی شده، وایبول هندسی شده، وایبول پواسون و نمایی هندسی شدهٔ اصلاح شده ارائه داده‌اند. توزیع وارون وایبول، توزیع احتمال طول عمر دیگری است که می‌تواند در زمینهٔ قابلیت اعتماد مهندسی مورداستفاده قرار گیرد. در این مقاله توزیع سری لگاریتمی وایبول معکوس که از ترکیب توزیع های وایبول معکوس و توزیع سری لگاریتمی حاصل می‌شود، کاربرد آن در مباحث پزشکی، تحلیل بقاء، قابلیت اعتماد معرفی می‌شود. تاکنون تعمیم، تعدیل و ترکیبات متعددی برای توزیع وایبول و توزیع معکوس آن ارائه شده است. جیانگ و مورتی [۱۰] ترکیب دو توزیع وایبول؛ جیانگ و زو [۹] ترکیب توزیع‌های وایبول و وایبول معکوس با وزن‌های منفی؛ فامویه و همکاران [۷] توزیع وایبول بتا؛ خان [۱۱] توزیع وایبول معکوس بتا؛ ساراحان و زیندین [۱۸] تعمیم جدیدی از توزیع وایبول؛ لو و شی [۱۴] توزیع وایبول پواسون؛ شرینا و اولیده [۱۹] توزیع وزنی وایبول معکوس؛ طهیر و همکاران [۲۱] توزیع لوماکس وایبول بر اساس خانواده وایبول تولیدشده؛ اولیده و همکاران [۱۷] توزیع وایبول معکوس تعمیم‌یافتهٔ گاما؛ محمود و همکاران [۱۵] ترکیب توزیع‌های وایبول و لوماکس؛ حسن و عبدلله [۸] توزیع وایبول لوماکس نمایی‌شده و چاکرابارتی و چودهوری [۲] ترکیب توزیع وایبول معکوس با توزیع‌های هندسی و پواسون بریده‌شده ارائه داده‌اند.

۲- توزیع سری لگاریتمی وایبول معکوس[۱] (IWLSD)

در این بخش برای به دست آوردن تابع چگالی توزیع سری لگاریتمی وایبول معکوس،

ابتدا توزیع وایبول معکوس مرکب و سپس با در نظر گرفتن توزیع سری لگاریتمی برای تعداد مؤلفه، توزیع سری لگاریتمی وایبول معکوس معرفی می‌شود.

۲-۱- توزیع وایبول معکوس مرکب[۲]

فرض کنید، $X_1, X_2, \ldots X_n$ یک نمونهٔ تصادفی از توزیع وایبول معکوس به ترتیب با توابع چگالی و توزیع

$$f(x;\lambda,\alpha) = \alpha\lambda x^{-(\alpha+1)} e^{-\lambda x^{-\alpha}}, x, \lambda, \alpha > 0 \tag{1}$$

$$F(x;\lambda,\alpha) = e^{-\lambda x^{-\alpha}}, x, \lambda, \alpha > 0 \tag{2}$$

باشند. اگر متغیر تصادفی Y بیان‌کنندهٔ کمترین تعداد مؤلفهٔ طول عمر مؤلفه‌های $X_1, X_2, \ldots X_N$ باشد؛ به‌طوری‌که:

$$Y = \min(X_1, X_2, \ldots X_N)$$

که در آن N تعداد مؤلفه‌ها است. از آنجا که یک متغیر تصادفی گسسته است، توزیع‌هایی چون هندسی، پواسون و یا پواسون بریده برای آن در نظر گرفته می‌شود [۲۰]. حال با فرض اینکه متغیرهای تصادفی Y و N از هم مستقل باشند، تابع توزیع Y به‌شرط $N = n$ به صورت

$$\begin{aligned} F_{Y|N=n}(y) &= P(Y \le y \mid N = n) = P(\min(X_1, X_2, \ldots X_N) \le y \mid N = n) \\ &= 1 - P(\min(X_1, X_2, \ldots X_N) \ge y \mid N = n) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^{n} P(X_i \ge y) = 1 - (1 - e^{-\lambda y^{-\alpha}})^n, y, \lambda, \alpha > 0 \end{aligned} \tag{3}$$

دست می‌آید. با توجه به تابع توزیع، تابع چگالی متغیر تصادفی Y برابر است با:

$$f_{Y|N=n}(y, \lambda, \alpha, n) = n\alpha\lambda e^{-\lambda y^{-\alpha}} (1 - e^{-\lambda y^{-\alpha}})^{n-1} y^{-(\alpha+1)}, y, \lambda, \alpha > 0 \tag{4}$$

برای اطلاع بیشتر به مقاله چاکرابارتی و چودهوری [۲] مراجعه کنید. در بخش بعد، با فرض اینکه متغیر تصادفی N دارای توزیع سری لگاریتمی با پارامتر θ است، توزیع سری لگاریتمی وایبول معکوس معرفی می‌شود.

۲-۲- توزیع سری لگاریتمی وایبول معکوس

در این بخش با فرض اینکه متغیر تصادفی Y به شرط $N=n$ دارای تابع چگالی (۴) و متغیر تصادفی N دارای توزیع سری لگاریتمی با تابع چگالی

$$P(N=n)=\frac{-1}{\ln(1-\theta)}\frac{\theta^n}{n}, n=1,2,\ldots,0 \tag{5}$$

است. به طوری که

$$E(N)=\frac{-1}{(1-\theta)\ln(1-\theta)} \tag{6}$$

تابع چگالی سری لگاریتمی وایبول معکوس به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} f(y,\lambda,\alpha,\theta) &= \sum_{n=1}^{\infty} f_{y|N=n}(y,\lambda,\alpha,\theta)P(N=n) \\ &= \frac{-1}{\ln(1-\theta)}\alpha\lambda e^{-\lambda y^{-\alpha}} y^{-(\alpha+1)}\sum_{n=1}^{\infty}\theta^n(1-e^{-\lambda y^{-\alpha}})^{n-1} \\ &= \frac{-1}{\ln(1-\theta)}\alpha\theta\lambda e^{-\lambda y^{-\alpha}} y^{-(\alpha+1)}\sum_{n=1}^{\infty}(\theta(1-e^{-\lambda y^{-\alpha}}))^{n-1} \\ &= \frac{-1}{\ln(1-\theta)}\frac{\alpha\theta\lambda e^{-\lambda y^{-\alpha}} y^{-(\alpha+1)}}{1-\theta+\theta e^{-\lambda y^{-\alpha}}}, y,\lambda,\alpha>0 \quad 0 \end{aligned} \tag{7}$$

تابع چگالی اخیر، تابع چگالی توزیع سری لگاریتمی وایبول معکوس است به طوری که

$$\int_0^{\infty} f(y;\lambda,\alpha,\theta)dy = 1$$

است. با توجه به رابطهٔ (۷) تابع توزیع، توزیع سری لگاریتمی وایبول معکوس برابر است با:

$$F(y;\lambda,\alpha,\theta)=1-\frac{\ln(1-\theta+\theta e^{-\lambda y^{-\alpha}})}{\ln(1-\theta)} \tag{8}$$

با استفاده از رابطه (۸) تابع بقای و تابع نرخ خطر به ترتیب به صورت

$$S(y;\lambda,\alpha,\theta) = ۱ - F(y;\lambda,\alpha,\theta) = \frac{\ln(۱-\theta+\theta e^{-\lambda y^{-\alpha}})}{\ln(۱-\theta)}$$

$$h(y) = \frac{f(y)}{S(y)} = \frac{-\alpha\lambda\theta e^{-\lambda y^{-\alpha}} y^{-(\alpha+۱)}}{(۱-\theta+\mathrm{l}e^{-\lambda y^{-\alpha}} y^{-\alpha})\mathrm{n}(۱-\theta+\theta e^{-\lambda y^{-\alpha}})}$$

بدست می‌آیند. در شکل‌های ۱ و ۲، تابع نرخ خطر برای مقادیر مختلف پارامترها رسم شده است. در ادامه با عنایت به رابطهٔ $\eta(y) = -\frac{f'(y)}{f(y)}$ نشان داده می‌شود که نرخ شکست توزیع سری لگاریتمی وایبول معکوس برحسب پارامترها نزولی است. برای این منظور $f'(y)$ برابر است با:

$$f'(y) = \frac{-۱}{\ln(۱-\theta)} \frac{\alpha\lambda\theta e^{-\lambda y^{-\alpha}} y^{-(\alpha+۱)}}{(۱-\theta)+\theta e^{-\lambda y^{-\alpha}}}[-(\alpha+۱)y^{-۱} + \alpha\lambda y^{-(\alpha+۱)} - \frac{\alpha\lambda\theta e^{-\lambda y^{-\alpha}} y^{-(\alpha+۱)}}{(۱-\theta)+\theta e^{-\lambda y^{-\alpha}}}] \quad (۹)$$

با توجه به رابطهٔ (۹) $\eta(y)$ برابر است با:

$$\eta(y) = (\alpha+۱)y^{-۱} - \alpha\lambda y^{-(\alpha+۱)} + \frac{\alpha\lambda\theta e^{-\lambda y^{-\alpha}} y^{-(\alpha+۱)}}{(۱-\theta)+\theta e^{-\lambda y^{-\alpha}}} \quad (۱۰)$$

به‌راحتی می‌توان نشان داد که مشتق رابطهٔ (۱۰) برابر است با:

$$\eta'(y) = -(\alpha+۱)y^{-۲} + \alpha(\alpha+۱)\lambda y^{-(\alpha+۲)} + \frac{\alpha\lambda\theta e^{-\lambda y^{-\alpha}} y^{-(\alpha+۱)}}{(۱-\theta)+\theta e^{-\lambda y^{-\alpha}}}[-(\alpha+۱)y^{-۱} + \alpha\lambda y^{-(\alpha+۱)} - \frac{\alpha\lambda\theta e^{-\lambda y^{-\alpha}} y^{-(\alpha+۱)}}{(۱-\theta)+\theta e^{-\lambda y^{-\alpha}}}] \quad (۱۱)$$

لازم به ذکر است وقتی‌که α یا λ از سمت راست به صفر میل می‌کند، مقدار $\eta'(y) < ۰$ برای تمام مقادیر $y > ۰$ است، بنابراین نتیجه می‌شود نرخ شکست نزولی است.

۳- خواص توزیع سری لگاریتمی وایبول معکوس

در این بخش چندک مرتبهٔ p–ام و گشتاورهای مرتبهٔ r–ام به ترتیب محاسبه می‌شوند.

۳-۱- چندک مرتبهٔ p–ام

با توجه به رابطهٔ (۸) برای چندک مرتبهٔ p–ام، اگر ε_p چندک مرتبهٔ p–ام باشد، می‌توان نوشت:

$$F(\varepsilon_p;\lambda,\alpha,\theta)=p$$

$$\frac{-1}{\ln(1-\theta)}\ln[(1-\theta)+\theta e^{-\lambda\varepsilon_p^{-\alpha}}]=p$$

که پس از انجام چند عملیات ریاضی چندک مرتبهٔ p–ام به‌صورت

$$\varepsilon_p=[\frac{-1}{\lambda}\ln(\frac{e^{-p\ln(1-\theta)}-(1-\theta)}{\theta})]^{\frac{-1}{\alpha}} \qquad (۱۲)$$

به‌دست می‌آید. با توجه به رابطهٔ (۱۲) میانه و انحراف چارکی توزیع IWLSD به ترتیب برابر خواهند بود با:

$$\varepsilon_{0/5}=M=[\frac{-1}{\lambda}\ln(\frac{1-(1-\theta)\sqrt{(1-\theta}}{\theta\sqrt{(1-\theta)}})]^{\frac{-1}{\alpha}} \qquad (۱۳)$$

$$Q_3-Q_1=[\frac{-1}{\lambda}\ln(\frac{1-(1-\theta)\sqrt[4]{(1-\theta)^3}}{\theta\sqrt[4]{(1-\theta)^3}})]^{\frac{-1}{\alpha}}-[\frac{-1}{\lambda}\ln(\frac{1-(1-\theta)\sqrt[4]{(1-\theta)}}{\theta\sqrt[4]{(1-\theta)}})]^{\frac{-1}{\alpha}} \qquad (۱۴)$$

۳-۲- گشتاور مرتبهٔ r–ام

با توجه به رابطهٔ (۷) گشتاور مرتبهٔ r–ام این توزیع به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$E(Y^{r}) = \frac{-1}{\ln(1-\theta)} \int_{0}^{\infty} \frac{\alpha\lambda\theta e^{-\lambda y^{-\alpha}} y^{-(\alpha+1-r)}}{(1-\theta)+\theta e^{-\lambda y^{-\alpha}}} dy$$

$$= \frac{-1}{(1-\theta)\ln(1-\theta)} \int_{0}^{\infty} \frac{\alpha\lambda\theta e^{-\lambda y^{-\alpha}} y^{-(\alpha+1-r)}}{\frac{\theta}{(1-\theta)} e^{-\lambda y^{-\alpha}}} dy$$

$$= \frac{-\alpha\lambda\theta}{(1-\theta)\ln(1-\theta)} \sum_{t=0}^{\infty} (-1)^{t} \int_{0}^{\infty} e^{-\lambda(t+1)y^{-\alpha}} y^{-(\alpha+1-r)} dy \qquad (۱۵)$$

قضیه ۱. گشتاور غیرمرکزی مرتبهٔ r– ام توزیع سری لگاریتمی وایبول معکوس در حالت $\alpha > r$ ، موجود است.

برهان: برای این منظور با توجه به رابطهٔ

$$\int_{0}^{\infty} e^{ax^{n}} x^{-m} dx = \frac{(-1)^{z+1} a^{z} \Gamma(-z, -az^{n})}{n}; \qquad z = \frac{m-1}{n}; n \neq 0 \qquad (۱۶)$$

می توان نوشت:

$$\int_{0}^{\infty} e^{-\lambda(t+1)y^{-\alpha}} y^{-(\alpha+1-r)} dy = \frac{(-1)^{\frac{r}{\alpha}+1} (-\lambda(t+1))^{\frac{r-\alpha}{\alpha}}}{-\alpha} \Gamma(\frac{r-\alpha}{\alpha}, \lambda(t+1)y^{-\alpha})$$

برای حالتی که $\alpha < r$ است، گشتاور غیرمرکزی مرتبهٔ r– ام وجود ندارد. گشتاور غیرمرکزی مرتبهٔ r– ام برابر است با:

$$E(Y^{r}) = \frac{\lambda\theta}{(1-\theta)\ln(1-\theta)} \sum_{t=0}^{\infty} (-1)^{t} (-1)^{\frac{r}{\alpha}+1} (-\lambda(t+1))^{\frac{r}{\alpha}-1} \Gamma(\frac{r-\alpha}{\alpha}, \lambda(t+1)y^{-\alpha})$$

۴- برآورد پارامترهای توزیع سری لگاریتمی وایبول معکوس

در این بخش پارامترهای توزیع سری لگاریتمی وایبول معکوس به روش‌های ماکسیمم درستنمایی و روش کمترین فاصله[۳] برآورد می‌شوند. در بخش برآورد ماکسیمم درستنمایی چون معادلات نرمال تابعی صریح از پارامترها نیستند، برای برآورد آنها از روش‌های عددی استفاده خواهد شد.

۴-۱- برآورد ماکسیمم درستنمایی

فرض کنید $Y_1,Y_2,...,Y_n$ یک نمونه تصادفی از رابطهٔ (۷) با بردار پارامتر (λ,α,θ) باشد. بر اساس نمونه فوق تابع درستنمایی برابر است با:

$$L(\lambda,\alpha,\theta)=(\frac{-1}{\ln(1-\theta)})^n\prod_{i=1}^{n}\frac{\alpha\lambda\theta e^{-\lambda y_i^{-\alpha}}y_i^{-(\alpha+1)}}{(1-\theta)+\theta e^{-\lambda y_i^{-\alpha}}} \tag{۱۷}$$

اگر $l(\lambda,\alpha,\theta)=\ln(L(\lambda,\alpha,\theta))$ باشد، آنگاه:

$$\begin{aligned} l(\lambda,\alpha,\theta)&=-\ln(-\ln(1-\theta))+n\ln(\alpha\lambda\theta)\\ &+\sum_{i=1}^{n}\ln(\frac{e^{-\lambda y_i^{-\alpha}}}{(1-\theta)+\theta e^{-\lambda y_i^{-\alpha}}})-(\alpha+1)\ln(y_i) \end{aligned} \tag{۱۸}$$

$$\frac{\partial l(\lambda,\alpha,\theta)}{\partial\lambda}=\frac{n}{\lambda}-\sum_{i=1}^{n}\frac{(1-\theta)y_i^{-\alpha}}{(1-\theta)+\theta e^{-\lambda y_i^{-\alpha}}} \tag{۱۹}$$

$$\frac{\partial l(\lambda,\alpha,\theta)}{\partial\alpha}=\frac{n}{\alpha}-\lambda\sum_{i=1}^{n}\frac{(1-\theta)y_i^{-\alpha}\ln(y_i)}{(1-\theta)+\theta e^{-\lambda y_i^{-\alpha}}} \tag{۲۰}$$

$$\frac{\partial l(\lambda,\alpha,\theta)}{\partial\theta}=\frac{-n}{(1-\theta)\ln(1-\theta)}+\frac{n}{\theta}+\sum_{i=1}^{n}\frac{(1-e^{-\lambda y_i^{-\alpha}})}{(1-\theta)+\theta e^{-\lambda y_i^{-\alpha}}} \tag{۲۱}$$

با توجه به روابط (۱۹)، (۲۰) و (۲۱) می‌توان نشان داد که معادلات نرمال تابع صریح از پارامترها نیستند. لذا برای برآورد آن‌ها می‌توان از روش‌های مختلف استفاده کرد که در ادامه الگوریتم EM مورد استفاده قرار می‌گیرد.

۴-۲- الگوریتم EM

پژوهشگران زیادی از الگوریتم EM برای برآورد پارامتر توزیع ها با دادهٔ کامل و غیر کامل استفاده کرده‌اند. به این الگوریتم شامل گام محاسبه امید ریاضی (E) و بیشینه سازی تابع درستنمایی (M) است که برای اطلاع بیشتر می‌توان به مقاله دیمپستر و همکاران [۶] مراجعه کرد. در این بخش برای استفاده از الگوریتم EM با استفاده از داده‌های نمونه، تابع چگالی توأم متغیرهای تصادفی متغیر های Y و N به صورت

$$f(y,n)=\frac{-1}{\ln(1-\theta)}\alpha\lambda e^{-\lambda y^{-\alpha}}\theta^{n}(1-e^{-\lambda y^{-\alpha}})^{n-1}y^{-(\alpha+1)},\ y>0 \qquad \ldots$$

(۲۲)

در نظر گرفت. برای به دست آوردن توزیع شرطی N به شرط Y، می‌توان نشان داد که تابع چگالی حاشیه‌ای متغیر Y برابر است با:

$$f(y)=\frac{-1}{\ln(1-\theta)}\alpha\lambda\theta e^{-\lambda y^{-\alpha}}y^{-(\alpha+1)}\frac{1}{(1-\theta)+\theta e^{-\lambda y^{-\alpha}}},\ y>0 \qquad (۲۳)$$

با توجه به روابط (۲۲) و (۲۳) می‌توان نوشت:

$$P(N=n\mid y)=[(1-\theta)+\theta e^{-\lambda y^{-\alpha}}][\theta(1-e^{-\lambda y^{-\alpha}})]^{n-1},n=1,2,\ldots \qquad (۲۴)$$

برای استفاده از گام E الگوریتم EM، با استفاده از رابطه (۲۴) امید ریاضی $E(N\mid Y=y)$ برابر است با:

$$\begin{aligned}E(N\mid Y=y)&=\sum_{n=1}^{\infty}nf(n\mid y)=(1-\theta+\theta e^{-\lambda y^{-\alpha}})\sum_{n=1}^{\infty}n[\theta(1-e^{-\lambda y^{-\alpha}})]^{n-1}\\&=(1-\theta)+\theta e^{-\lambda y^{-\alpha}})\frac{d}{d\theta}\sum_{n=1}^{\infty}[\theta(1-e^{-\lambda y^{-\alpha}})]^{n}\\&=\frac{1}{(1-\theta)+\theta e^{-\lambda y^{-\alpha}}}\end{aligned} \qquad (۲۵)$$

از برابری روابط (۶) و (۲۴) می‌توان نوشت:

$$\frac{-\theta}{\ln(1-\theta)}=\frac{1-\theta}{(1-\theta)+\theta e^{-\lambda y^{-\alpha}}} \qquad (۲۶)$$

از رابطه (۲۵) پارامتر θ برای مقادیر داده شده α و λ با استفاده از روش های عددی برآورد می شود. بنابراین اگر $\hat{\theta}^{(r+1)}$ برآوردگر θ در مرحلهٔ $(r+1)$-ام باشد، برآوردگرهای ماکسیمم درستنمایی λ و α با توجه گام M الگوریتم EM به ترتیب برابرند با:

$$\hat{\lambda}^{(r+1)}=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\hat{\theta}_i^{(r+1)}y_i^{-\hat{\alpha}^{(r+1)}}(-\ln(1-\hat{\theta}_i^{(r+1)}))^{-1}} \qquad (۲۷)$$

$$\hat{\alpha}^{(r+1)} = \frac{n}{\hat{\lambda}^{(r+1)} \sum_{i=1}^{n} \hat{\theta}_i^{(r+1)} y_i^{-\hat{\alpha}^{(r+1)}} \ln(y_i)(-\ln(1-\hat{\theta}_i^{(r+1)}))^{-1}} \qquad (۲۸)$$

۴-۳- روش کمترین فاصله

برای برآورد توزیع یک نمونه از مشاهدات، روش‌های مختلف آماری ارائه شده است. که از معروف‌ترین آن‌ها روش گشتاوری و روش ماکسیمم درستنمایی هستند. روش برآورد کمترین فاصله (MDE)، نیز یکی از روش‌های آماری برای برازش مدل‌های آماری برای داده‌ها با استفاده از تابع توزیع و تابع توزیع تجربی است. گاهی اوقات برای برآورد توزیع مشاهداتی که بر اساس آزمایش‌ها یا وقایع زیستی یا پزشکی به‌دست می‌آیند؛ از این روش استفاده می شود. در این موارد از مقایسه توزیع تجربی مشاهدات با توزیع آماری ، توزیعی که کمترین فاصله را با توزیع تجربی مشاهدات داشته باشد، به‌عنوان برآوردی از توزیع معرفی می‌شود. این فاصله را می‌توان با استفاده از آزمون های مانند آزمون کولموگروف-اسمیرنوف یا آزمون کی دو سنجید. در این بخش برای برآورد پارامترهای توزیع سری لگاریتمی وایبول معکوس، با توجه به توابع توزیع $F_n(y;\lambda,\alpha,\theta)$ و $F(y;\lambda,\alpha,\theta)$ بردار پارامتر را با استفاده از رابطهٔ زیر برآورد کرد.

$$d[F(y;\hat{\lambda},\hat{\alpha},\hat{\theta}),F_n(y;\lambda,\alpha,\theta)] = \inf_{\lambda,\alpha,\theta} d[F(y)-F_n(y)] \qquad (۲۹)$$

برای بررسی فاصله بین توزیع‌های تجربی و توزیع مشاهدات از آزمون کولموگروف اسمیرنوف استفاده می‌شود.

۵- شبیه‌سازی

در این بخش برای ارزیابی روش‌های برآورد بردار پارامتر با استفاده از الگوریتم EM و روش کمترین فاصله، نمونه‌هایی به اندازه‌های مختلف برای مقادیر مختلف پارامترها از (۷) تولید و نتایج حاصل استفاده از روش‌های برآورد را با استفاده از معیارهای اریبی و میانگین توان دوم خطا مورد مقایسه قرار می‌گیرند. برای دقت شبیه‌سازی برای هراندازه نمونه ۱۰۰۰ بار تکرار به‌وسیله نرم‌افزار R گزارش‌شده است.

با توجه به نتایج جداول۲ تا ۵، برآورد پارامترها به روش ماکسیمم درستنمایی با استفاده

از الگوریتم EM در مقایسه با برآورد پارامترها به روش کمترین فاصله همواره بهتر عمل می‌کند و با افزایش اندازه نمونه میانگین توان دوم خطا کاهش پیدا می‌کنند، که میزان کاهش میانگین توان دوم خطا با افزایش اندازه نمونه با استفاده از روش ماکسیمم درستنمایی قابل‌توجه است. همچنین با مراجعه به جدول ۳ و ۴ می‌توان گفت که، برای مقادیر α و λ ، میانگین توان دوم خطا روش ماکسیمم درستنمایی با استفاده از الگوریتم EM در مقایسه با روش کمترین فاصله همواره کوچک‌تر است. لذا در جمع‌بندی می‌توان روش ماکسیمم درستنمایی با استفاده از الگوریتم EM را پیشنهاد کرد.

۶- تحلیل کاربردی یک مثال واقعی

برای بررسی کاربردی توزیع سری لگاریتمی وایبول معکوس، از داده‌های مقالات آدامیدیس و لوکاس [۱]، کاس [۱۳] و چاکرابارتی و چودهوری [۲] استفاده شده است. در این مقالات زمان ازکارافتادن سیستم تهویه مطبوع ۲۱۳ هواپیمای بوئینگ ۷۲۰ بررسی شده است. در سال ۲۰۰۷، کاس توزیع وایبول معکوس را برای مدل بندی این داده‌ها به کار برد و در سال ۲۰۱۸ نیز چاکرابارتی و چودهوری توزیع هندسی وایبول معکوس را برای این داده‌ها در نظر گرفتند. لذا در این مقاله نتایج برازش توزیع سری لگاریتمی وایبول معکوس در مقایسه با سایر توزیع ها در جدول ۱ آورده شده است. همان‌گونه که در جدول ۱ مشخص است؛ برازش توزیع سری لگاریتمی وایبول معکوس بر اساس معیارهای AIC و BIC بسیار بهتر از مدل‌های قبلی است.

جدول ۱- مقایسه برازش توزیع سری لگاریتمی وایبول معکوس با سایر توزیع‌های، برای زمان ازکارافتادن سیستم تهویه مطبوع هواپیماهای بوئینگ ۷۲۰.

توزیع	$\hat{\alpha}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{\theta}$	$\hat{p}$	$\hat{l}$	AIC	BIC
وایبول معکوس	۰/۷۳۶	۱۰/۹۹۷	-	-	-۱۲۱۰/۳۱	۲۴۲۴/۶۳۲	۲۴۳۱/۳۵۵
هندسی وایبول معکوس	۰/۷۳۴	۱۰/۸۸۷	-	۰/۹۸	-۱۲۰۵/۶۸	۲۴۱۷/۳۵۷	۲۴۲۷/۴۴۱
سری لگاریتمی وایبول معکوس	۰/۰۱۱۷	۰/۰۱۱۸	۰/۶۹۹	-	-۳۱۴/۳۳۶	۶۳۶/۶۷۳	۶۴۱/۳۵۸

۶-۱- نتایج شبیه‌سازی

جدول ۲- برآورد پارامترهای و میانگین توان دوم خطا وقتی‌که $\theta = ۰/۸$، $\lambda = ۰/۷$ و $\alpha = ۰/۶$ است.

n	پارامتر	برآورد ماکسیمم درستنمایی با استفاده از EM		روش کمترین فاصله	
		برآورد	میانگین توان دوم خطا	برآورد	میانگین توان دوم خطا
۳۰	α	۰/۸۸۶۷	۰/۰۱۰۲	۰/۶۷۰۸	۰/۰۱۱۲
	λ	۰/۴۳۸۷	۰/۰۰۱۱	۰/۶۰۸۳	۰/۰۰۴۴
	P	۰/۶۶۷۱	۰/۰۰۰۱	۰/۶۸۶۷	۰/۰۱۰۹
۵۰	α	۰/۸۸۲۴	۰/۰۰۷۲	۰/۶۴۳۳	۰/۰۰۶۱
	λ	۰/۴۴۲۹	۰/۰۰۰۸	۰/۶۰۱۰	۰/۰۰۹۴
	P	۰/۶۶۸۰	۰/۰۰۳۱	۰/۶۳۱۳	۰/۰۴۹۰
۷۰	α	۰/۸۶۶۶	۰/۰۰۳۷	۰/۶۱۹۶	۰/۰۰۳۱
	λ	۰/۴۴۳۸	۰/۰۰۰۴	۰/۶۱۰۰	۰/۰۰۶۲
	P	۰/۶۶۸۱	۰/۰۰۰۲	۰/۶۸۱۳	۰/۰۲۵۳
۱۰۰	α	۰/۸۷۷۹	۰/۰۰۲۴	۰/۶۰۶۳	۰/۰۰۱۳
	λ	۰/۴۴۲۹	۰/۰۰۰۳	۰/۶۰۵۰	۰/۰۰۲۸
	P	۰/۶۶۷۹	۰/۰۰۰۲	۰/۷۰۴۰	۰/۰۱۰۸
۲۰۰	α	۰/۸۵۹۲	۰/۰۰۰۹	۰/۶۱۰۰	۰/۰۰۰۱
	λ	۰/۴۴۶۵	۰/۰۰۰۱	۰/۶۰۱۳	۰/۰۰۰۱
	p	۰/۶۶۸۷	۰/۰۰۰۱	۰/۷۱۱۰	۰/۰۰۰۱

جدول ۳- برآورد پارامترهای و میانگین توان دوم خطا وقتی‌که $\theta = ۰/۲$، $\lambda = ۰/۷$ و $\alpha = ۱/۲$ است.

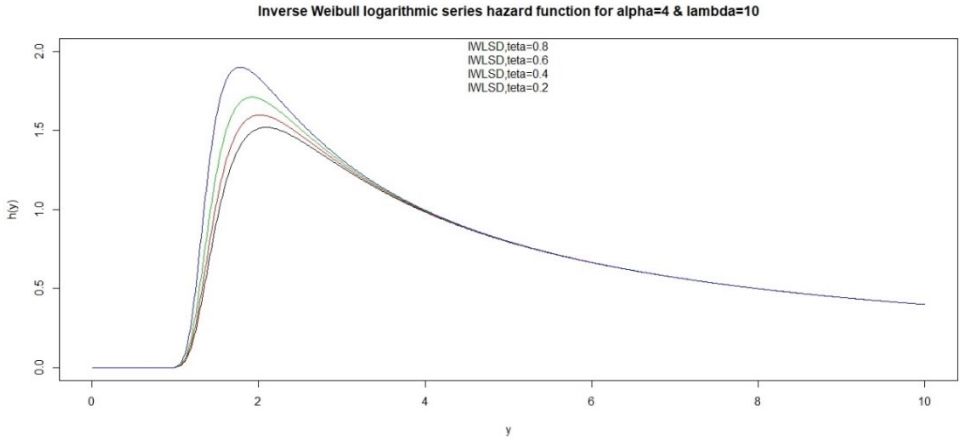
n	پارامتر	برآورد ماکسیمم درستنمایی با استفاده از EM		روش کمترین فاصله	
		برآورد	میانگین توان دوم خطا	برآورد	میانگین توان دوم خطا
۳۰	α	۱/۹۳۷۷	۰/۰۱۳۳	۱/۱۳۵۴	۰/۰۰۳۵
	λ	۰/۶۶۷۲	۰/۰۰۱۰	۰/۸۸۳۳	۰/۰۱۴۲
	p	۰/۷۰۲۲	۰/۰۰۰۱	۰/۵۲۰۰	۰/۰۲۸۹
۵۰	α	۱/۹۲۸۶	۰/۰۱۲۰	۱/۱۱۱۱	۰/۰۰۱۱
	λ	۰/۶۷۳۱	۰/۰۰۰۷	۰/۹۳۳۳	۰/۰۰۹۴
	P	۰/۷۰۲۰	۰/۰۰۰۱	۰/۶۰۳۳	۰/۰۱۳۹
۷۰	α	۱/۹۴۶۰	۰/۰۰۷۴	۱/۱۰۱۲	۰/۰۰۰۲
	λ	۰/۶۷۵۸	۰/۰۰۰۱	۰/۸۹۲۵	۰/۰۰۶۰
	P	۰/۷۰۱۵	۰/۰۰۰۶	۰/۵۵۹۱	۰/۰۰۸۵
۱۰۰	α	۱/۹۳۲۵	۰/۰۰۵۱	۱/۱۰۰۰	۰/۰۰۰۱
	λ	۰/۶۶۸۰	۰/۰۰۰۴	۰/۸۸۰۰	۰/۰۰۳۸
	P	۰/۷۰۱۹	۰/۰۰۰۱	۰/۵۴۶۰	۰/۰۰۵۵
۲۰۰	α	۱/۹۱۸۸	۰/۰۰۴۹	۱/۱۰۰۰	۰/۰۰۰۱
	λ	۰/۶۷۰۲	۰/۰۰۰۲	۰/۸۷۲۵	۰/۰۰۳۶
	p	۰/۷۰۱۲	۰/۰۰۰۱	۰/۵۳۷۰	۰/۰۰۵۱

جدول۴- برآورد پارامترهای و میانگین توان دوم خطا وقتی‌که $\theta = ۰/۸$، $\lambda = ۰/۷$ و $\alpha = ۱/۲$ است.

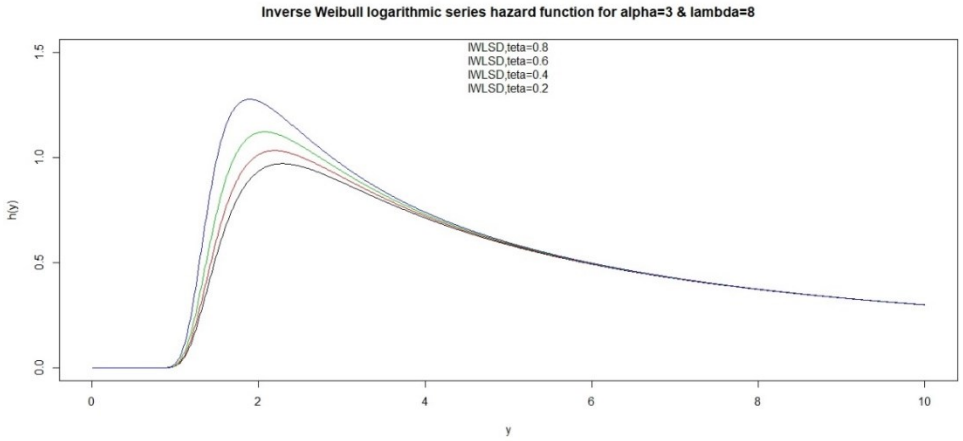
n	پارامتر	برآورد ماکسیمم درستنمایی با استفاده از EM		روش کمترین فاصله	
		برآورد	میانگین توان دوم خطا	برآورد	میانگین توان دوم خطا
۳۰	α	۱/۱۲۰۰	۰/۰۰۴۴	۱/۲۸۸۶	۰/۰۱۳۰
	λ	۰/۴۸۵۸	۰/۰۰۰۳	۰/۶۶۱۸	۰/۰۱۶۸
	p	۰/۶۸۲۱	۰/۰۰۰۱	۰/۷۱۳۴	۰/۰۳۳۶
۵۰	α	۱/۱۲۰۳	۰/۰۰۲۰	۱/۴۶۴۶	۰/۰۲۴۰
	λ	۰/۴۸۵۸	۰/۰۰۰۲	۰/۴۸۵۴	۰/۰۲۴۰
	p	۰/۶۸۲۲	۰/۰۰۰۱	۰/۳۴۰۸	۰/۱۰۲۰
۷۰	α	۱/۱۱۷۸	۰/۰۰۱۵	۱/۳۸۴۰	۰/۰۰۷۴
	λ	۰/۴۸۳۷	۰/۰۰۰۱	۰/۵۶۲۹	۰/۰۰۷۶
	p	۰/۶۸۲۰	۰/۰۰۰۱	۰/۵۷۷۲	۰/۰۴۴۲
۱۰۰	α	۱/۱۱۷۱	۰/۰۰۰۹	۱/۳۷۵۴	۰/۰۰۳۲
	λ	۱/۴۸۴۱	۰/۰۰۰۸	۰/۵۷۲۱	۰/۰۰۳۳
	p	۰/۶۸۲۱	۰/۰۰۰۲	۰/۶۳۰۰	۰/۰۲۵۴
۲۰۰	α	۱/۱۱۸۳	۰/۰۰۰۵	۱/۳۵۹۶	۰/۰۰۲۶
	λ	۰/۴۸۵۳	۰/۰۰۰۵	۰/۵۸۹۶	۰/۰۰۲۸
	p	۰/۶۸۲۳	۰/۰۰۰۱	۰/۶۷۵۸	۰/۰۱۷۳

جدول ۵- برآورد پارامترهای و میانگین توان دوم خطا وقتی‌که$\theta = ۰/۲$ ، $\lambda = ۲/۳$ و $\alpha = ۱/۲$ است.

n	پارامتر	برآورد ماکسیمم درستنمایی با استفاده از EM		روش کمترین فاصله	
		برآورد	میانگین توان دوم خطا	برآورد	میانگین توان دوم خطا
۳۰	α	۱/۸۶۷۶	۰/۰۲۵۵	۱/۱۲۱۲	۰/۰۰۱۲
	λ	۱/۲۶۳۰	۰/۰۰۱۹	۲/۶۰۰۲	۰/۰۰۹۲
	p	۰/۷۱۰۴۰	۰/۰۰۰۱	۰/۵۰۲۶	۰/۰۰۸۶
۵۰	α	۱/۸۴۵۲	۰/۰۲۱۴	۱/۱۱۱۵	۰/۰۰۰۷
	λ	۱/۲۵۹۳	۰/۰۰۱۷	۲/۶۳۰۲	۰/۰۰۷۲
	p	۰/۷۰۹۷	۰/۰۰۰۱	۰/۵۷۱۳	۰/۰۰۸۶
۷۰	α	۱/۸۳۳۵	۰/۰۱۳۴	۱/۱۱۲۵	۰/۰۰۰۷
	λ	۱/۲۵۳۸	۰/۰۰۰۹	۲/۵۶۱۳	۰/۰۰۹۷
	p	۰/۷۰۶۹	۰/۰۰۰۱	۰/۴۹۲۳	۰/۰۱۴۸
۱۰۰	α	۱/۸۴۵۲	۰/۰۱۱۳	۱/۱۰۳۶	۰/۰۰۰۲
	λ	۱/۲۵۶۴	۰/۰۰۰۶	۲/۶۰۵۶	۰/۰۱۱۲
	p	۰/۷۰۹۵۰	۰/۰۰۰۱	۰/۵۵۱۴	۰/۰۱۳۷
۲۰۰	α	۱/۸۲۳۲	۰/۰۰۵۰	۱/۱۰۰۸	۰/۰۰۰۶
	λ	۱/۲۴۹۳	۰/۰۰۰۳	۲/۶۰۷۰	۰/۰۰۳۸
	p	۰/۷۰۹۲۰	۰/۰۰۰۲	۰/۵۷۰۵۰	۰/۰۰۵۳



شکل ۱- تابع نرخ خطر توزیع سری لگاریتمی وایبول معکوس با پارامترهای α=۴ و λ=۱۰



شکل ۲- تابع نرخ خطر توزیع سری لگاریتمی وایبول معکوس با پارامترهای α=۳ و λ=۸

توضیحات

1. Inverse Weibull Logarithmic Series Distribution (IWLSD)
2. Compounded Inverse Weibull Distribution
3. Minimum Distance Estimation

مرجع‌ها

[1] Adamidis, K., and Loulas, S. (1998). A lifetime distribution with decreasing failure rate. *Statistics and Probability Letters*, **39** (1), 35-42.

[2] Chakrabarty, J.B., and Chowdhury, S. (2018). Compounded inverse Weibull distributions: Properties, inference and applications. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 1-22.

[3] Chowdhury, S., Mukherjee, A., and Nanda, A.K. (2017). On compounded geometric distribution and their applications. *Communications in Statistics-Simulation and computation*, **46** (3), 1715-1734.

[4] Chowdhury, S., and Nanda, A.K. (2018). A lifetime distribution with applications in inventory and insurance. *International Journal of Quality & Reliability Management*, **35** (2), 1-19.

[5] Dempster A.P., Laird, N.M., and Rubin, D.B., (1977). Maximum likelihood from incomplete. data via the EM algorithm. *J. R. Stat. Soc. Ser.*, **B.** 1–38.

[6] Erto, P. (1989). Genesis, properties and identification of the inverse Weibull lifetime model. *Statistical Applicate*, **1** (4), 117-128.

[7] Famoye, F., Lee, C., and Olumolade, O. (2005). The Beta-Weibull distribution. *Journal of Statistical Theory and Applications*, **4** (2), 121-136.

[8] Hassan, A.S., and Abd-Allah, M. (2018). Exponentiated Weibull-Lomax Distribution: Properties and Estimation. *Journal of Data Science*, **277**, 298.

[9] Jiang, R., and Zuo, M.L. (1999). Weibull and inverse Weibull mixture models allowing negative Weights. *Reliability Engineering & System Safety*, **66** (3), 227-234.

[10] Jiang, R., and Murthy, D.N.P. (1995). Modelling failure data by mixture of two Weibull distributions: a graphical approach. *IEEE*

Transactions on Reliability, **44** (3), 477–488.

[11] Khan, M.S. (2010). The beta inverse Weibull distribution. *International Transactions in Mathematical Sciences and Computer*, **3** (1), 113-119.

[12] Khan, M.S., Pasha, G.R., and Pasha, A.H. (2008). Theoretical analysis of inverse Weibull distribution. *WSEAS Transactions on Mathematics*, **7** (2), 30-38.

[13] Kus, C. (2007). A new lifetime distribution. *Computational Statistics and Data Analysis*, **51** (9), 4497-4509.

[14] Lu, W., and Shi, D. (2012). A new compounding life distribution: The Weibull–Poisson distribution. *Journal of applied statistics*, **39** (1), 21-38.

[15] Mahmoud, M., Nassar, M.M., and Afea, M.A. (2017). Bayesian Estimation and Prediction for a Mixture of Weibull and Lomax Distributions. *International Journal of Innovative Research and Development*, **6** (5).

[16] Nadarajah, S. and Kotz, S. (2005). On Some Recent Modifications of Weibull Distribution. *IEEE Transactions on Reliability*, **54** (4), 561-562.

[17] Oluyede, B.O., and et al. (2017). The Gamma-Generalized Inverse Weibull Distribution with Applications to Pricing and Lifetime Data. *Journal of Computations & Modelling*, **7** (2), 1-28.

[18] Sarhan, A.M., and Zaindin, M. (2009). Modified Weibull distribution. APPS. *Applied Sciences*, **11**, 123-136.

[19] Sherina, V. and Oluyede, B.O. (2014). Weighted inverse Weibull distribution: Statistical Properties and applications. *Theoretical Mathematics & Applications*, **4** (2), 1-30.

[20] Souza, W., and Cribari, N.F. (2011). The Weibull-geometric distribution. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **81**(۵), 645-657.

[21] Tahir, M., Gauss, M., Mansoor, M., and Zubair, M. (2015). The Weibull-Lomax distribution: properties and applications. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, **44** (2), 461-480.

[22] Tahmasbi, R., and Rezaei, S. (2008). A two-parameter lifetime distribution with decreasing failure rate. *Computational Statistics and Data Analysis*, **52** (8), 3889-3901.

[23] Weibull, W. (1951). A statistical distribution function of wide applicability. *Journal of applied mechanics*, **18** (3), 293-297.

پرویز نصیری
دکتری آمار و دانشیار گروه آمار دانشگاه پیام نور
گروه آمار، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران.
رایانشانی: pnasiri@pnu.ac.ir

امیرعباس آذریان
دکتری آمار
گروه آمار، مدیریت آمار و فناوری اطلاعات، دانشگاه علوم پزشکی مشهد، مشهد، ایران.
رایانشانی: azarianaa1@gmail.com