مجله‌ی بررسی‌های آمار رسمی ایران
سال۲۲، شماره‌ی ۱، بهار و تابستان ۱۳۹۰، صص ۱ – ۱۵

بررسی مدل صف‌بندی GI/G/۱ در حالت گذرا با رهیافت بیزی

محمدرضا صالحی راد[†]، آسیه عباسی[‡,*]

[†] دانشگاه علامه طباطبایی
[‡] مرکز آمار ایران

چکیده: در این مقاله به‌کمک استنباط بیزی رفتار گذرای یک سامانه‌ی صف‌بندی با یک سرویس‌دهنده را بررسی می‌کنیم که در آن توزیع‌های مدت زمان بین دو ورود متوالی و زمان سرویس‌دهی نامعلوم است. این توزیع‌ها به‌وسیله‌ی یکی از اعضای خانواده ارلنگ تعمیم‌یافته‌ی آمیخته[۱] (MGE) تقریب زده می‌شوند. با بازنویسی پارامترهای مدل و امکان استفاده از یک توزیع پیشین ناآگاهی‌بخش، به کارگیری روش‌های مونت کارلوی زنجیره مارکوفی فراهم می‌شود. سپس براوردهای بیزی اندازه‌های مؤثر بودن سامانه را ارایه می‌دهیم که این براوردها بر مبنای نتایج به‌دست آمده از مطالعات اخیر در سامانه‌ی صف‌بندی MGE/MGE/۱ از دیدگاه فراوانی‌گرا استوار است. با استفاده از اندازه‌های مؤثر بودن به‌دست آورده‌شده، به بررسی داده‌های حاصل از یک بانک که از دستگاه نوبت‌دهی استفاده می‌کند، می‌پردازیم.

واژگان کلیدی: مدل صف‌بندی GI/G/۱؛ استنباط بیزی؛ توزیع ارلنگ تعمیم‌یافته‌ی آمیخته؛ رفتار گذرا؛ زنجیر مارکوف مونت کارلویی (MCMC).

۱- مقدمه

به‌طور کلی، هرگاه شی یا فردی به‌منظور اخذ سرویس به مکانی مراجعه کند و ارایه‌ی سرویس بلافاصله مقدور نباشد، باید منتظر بماند و بدین ترتیب صف تشکیل می‌شود. از

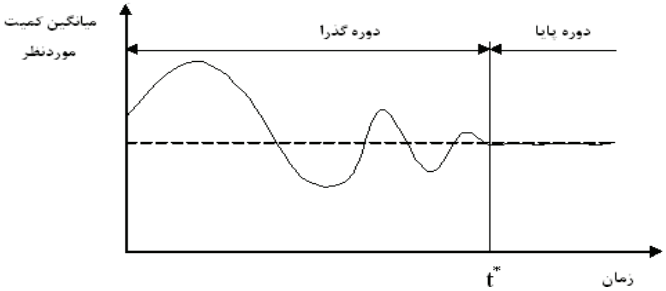
---

* نویسنده‌ی عهده‌دار مکاتبات
دریافت: ۱۳۸۸/۱۱/۱۴، پذیرش: ۱۳۹۰/۱/۳۰

زمانی که ارلنگ ریاضیدان دانمارکی نظریه‌ی صف را معرفی کرد تا کنون مدل‌های صف‌بندی مختلفی مورد بررسی قرار گرفته است که در میان آن‌ها، مدل‌های صف‌بندی نمایی با الگوی زمان‌های بین ورود و زمان سرویس‌دهی دارای توزیع نمایی به‌دلیل سادگی محاسبات، شهرت بیش‌تری از مدل‌های دیگر یافته‌اند.

اما داشتن توزیع نمایی برای زمان بین ورود و سرویس در عمل بندرت رخ می‌دهد و تعیین توزیع مدت زمان بین ورود و سرویس متقاضیان مشکل است. در این مقاله، مدل صف‌بندی $GI/G/1/\infty/FCFS$ را در حالت گذرا مورد بررسی قرار خواهیم داد که برای سادگی در علائم، آن را با $GI/G/1$ نشان می‌دهیم. در این مدل، G معرف توزیع کلی است، یعنی زمان‌های بین دو ورود متوالی به سامانه و همچنین زمان‌های سرویس‌دهی، متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع با توزیع احتمال کلی هستند. نظم صف یا خط مشی سرویس‌دهی در این مدل صف‌بندی، به‌ترتیب نوبت ورود متقاضیان می‌باشد.

معمولاً ارزیابی عملکرد و بهینه‌سازی مدل‌های صف‌بندی، به‌کمک معیارهایی از قبیل: طول صف، زمان انتظار متقاضیان در صف یا سامانه، دوره‌ی اشتغال سرویس‌دهنده، مدت زمان بیکاری سرویس‌دهنده و شدت ترافیک صورت می‌گیرد. از آنجایی که در بیش‌تر سامانه‌ها، معیارهای بالا، ماهیت تصادفی دارند، معمولاً از میانگین آن‌ها که به اندازه‌های مؤثر بودن شهرت دارند، استفاده می‌شود و تحلیل مدل‌های صف‌بندی بر اساس این اندازه‌ها، در دو دوره‌ی زمانی گذرا و پایا انجام می‌گیرد. برای مثال شکل ۱ را در نظر بگیرید. همان‌طور که در شکل ۱ می‌بینیم در برخی از مدل‌های صف‌بندی هنگامی که زمان از مقدار معینی همچون t^* عبور می‌کند، اندازه‌های مؤثر بودن به سمت اعداد ثابتی میل می‌کنند. بدین معنا که تغییرات سامانه در این دوره مستقل از زمان است. به این دوره، دوره‌ی پایا گفته می‌شود.



شکل ۱- نمایش دوره‌ی گذرا و پایا

به‌دلیل سادگی محاسبات و اهمیت بررسی تغییرات سامانه در دراز مدت، تحلیل مدل‌های صف‌بندی در حالت پایا پیشرفت فراوانی داشته است. اما در بسیاری از موارد کاربردی، تحلیل رفتار مدل صف‌بندی در دوره‌ی گذرا بسیار مهم است. به‌عنوان مثال، زمانی که سامانه به‌طور منظم فعالیت خود را قطع و دوباره شروع به کار می‌کند و یا همگرایی به دوره‌ی پایا بسیار کند صورت گیرد. بنا بر این، تحلیل مدل صف‌بندی $GI/G/1$ را در دوره‌ی گذرا انجام می‌دهیم.

از آنجایی که در این مدل، توزیع‌های زمان بین ورود و سرویس‌دهی کلی (نامعلوم) هستند، لذا در بخش اول، پس از مدل‌بندی سامانه‌ی صف‌بندی $GI/G/1$، شیوه‌ی تقریب این توزیع‌ها را شرح می‌دهیم. در بخش دوم، براورد بیزی پارامترهای مدل را ارایه می‌کنیم. در بخش سوم، با استفاده از نتایج به‌دست آمده، اندازه‌های مؤثر بودن سامانه‌ی صف‌بندی را براورد می‌کنیم. در بخش چهارم، به بررسی سامانه‌ی صف‌بندی یک بانک و مقایسه‌ی نتایج با عملکرد دستگاه نوبت‌دهی می‌پردازیم.

۲- تقریب توزیع‌های زمان بین ورود و سرویس‌دهی متقاضیان

از آنجایی که در مدل صف‌بندی $GI/G/1$، از ساختار توزیع‌های زمان بین ورود و سرویس بی‌اطلاع هستیم، بنا بر این باید این توزیع‌ها را براورد یا تقریب کنیم. دیور و لورنز در [۷] نشان دادند که هر تابع پیوسته‌ی $f(x)$ در بازه‌ی $(0,\infty)$ را می‌توان به‌وسیله‌ی ترکیبی از توزیع‌های گاما با وزن‌های $\frac{1}{u}f\left(\frac{k}{u}\right)$ تقریب زد. بنا بر این برای تقریب توزیع‌های مورد نظر از این نتیجه استفاده می‌کنیم.

حال فرض می‌کنیم X متغیر زمان‌های بین ورود یا زمان‌های سرویس‌دهی باشد که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$X=\begin{cases} Y_1 & \text{با احتمال } P_1 \\ Y_1+Y_2 & \text{با احتمال } P_2 \\ \vdots & \\ Y_1+\cdots+Y_L & \text{با احتمال } P_L \end{cases} \qquad (1)$$

که در آن $\sum_{r=1}^{L} P_r = 1$ و $P_r > 0$ ، $Y_r \sim \exp(\lambda_r)$ و $\lambda_r > 0$ هستند. برای این منظور شکل ۲ را در نظر بگیرید. همان‌طور که در این شکل می‌بینیم، زمان‌های بین ورود و سرویس هر متقاضی را می‌توان به‌صورت دنباله‌ای متناهی از متغیرهای تصادفی که دارای توزیع نمایی هستند، نشان داد.

بنا بر این تابع چگالی زمان‌های بین ورود یا سرویس را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$f(x \mid L, P, \lambda) = \sum_{r=1}^{L} P_r f_r(x \mid \lambda_1, \ldots, \lambda_r) \qquad x \geq 0 \tag{۲}$$

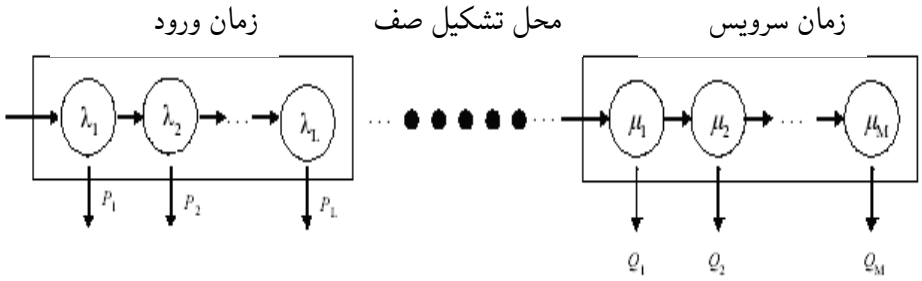
که در آن $f_r(x \mid \lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ تابع چگالی توزیع ارلنگ تعمیم‌یافته است [۳]. یعنی مجموع r توزیع نمایی با نرخ‌های $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f_r(x \mid \lambda_1, \ldots, \lambda_r) = \sum_{j=1}^{r} \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{r} \frac{\lambda_i}{\lambda_i - \lambda_j} \right) \lambda_j \exp(-\lambda_j x) \qquad x \geq 0$$

و $f(x \mid L, P, \lambda)$ تابع چگالی توزیع ارلنگ تعمیم‌یافته‌ی آمیخته و بردارهای $\underline{P}$ و $\underline{\lambda}$ به‌صورت زیر هستند.

$$\underline{P} = (P_1, \ldots, P_r) \quad \text{و} \quad \underline{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \qquad r = 1, 2, \ldots, L$$

برای زمان‌های سرویس به جای λ از μ و به جای $\underline{P} = (P_1, \ldots, P_r)$ از $\underline{Q} = (q_1, \ldots, q_r)$ استفاده می‌کنیم.



شکل ۲- نمایشی از متغیر تصادفی مدت زمان بین ورود و زمان سرویس‌دهی

کومانی نشان داد توزیع متغیر X در (۱) را می‌توان به‌صورت جایگشتی از نرخ‌ها نوشت [۶]. بنا بر این بدون از دست دادن کلیت مسئله فرض می‌کنیم $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_L$ باشد. با این فرض، پارامترهای λ_i ها را می‌توان به‌صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\lambda_r = \lambda_1 \upsilon_2 \ldots \upsilon_r \qquad 0 < \upsilon_i \leq 1, \quad i = 2, \ldots, r$$

در نتیجه، فضای پارامتر $(L, \underline{P}, \underline{\lambda})$ به $(L, \underline{P}, \lambda_1, \underline{\upsilon})$ تبدیل می‌شود که محاسبات را آسان‌تر می‌کند. این تبدیل امکان استفاده از یک توزیع پیشین ناسره برای $(L, \underline{P}, \underline{\lambda})$ را فراهم می‌کند و از طرفی عمل‌کرد الگوریتم مونت کارلوی زنجیر مارکوفی راحت‌تر انجام می‌گیرد.

حال که توزیع مدت زمان بین ورود و سرویس‌دهی متقاضیان و همچنین پارامترهای جدید مشخص شدند، باید به براورد پارامترهای نامعلوم بپردازیم. برای براورد پارامترهای مدل می‌توان از دو دیدگاه کلاسیک و بیز استفاده کرد. در دیدگاه کلاسیک، معمولاً پارامترها مقادیر ثابتی هستند که به‌کمک یک نمونه‌ی تصادفی و به روش ماکسیمم درستنمایی، براورد می‌شوند. اما از دیدگاه بیز، که در این مقاله به آن پرداخته می‌شود، پارامترها متغیرهای تصادفی می‌باشند که خود دارای یک توزیع هستند. استفاده از روش‌های بیزی در نظریه‌ی صف به اوایل دهه‌ی ۱۹۷۰ برمی‌گردد. اولین بار باگچی و کونینچام در سال ۱۹۷۲ یک مدل صف‌بندی مارکوفی با یک سرویس‌دهنده را در نظر گرفته و به براورد بیزی نرخ سرویس‌دهی بهینه و ظرفیت سامانه پرداختند [۴]. پس از آن مداپر [۱۲] و رینولز [۱۳] به تحقیقات در این زمینه ادامه دادند. اما در دهه‌ی ۱۹۸۰ رویکرد تازه‌ای توسط آرمرو [۱]، مگراس و همکاران [۱۱] و مگراس و سینگ پوروالا [۱۰] صورت گرفت و همزمان با گسترش روش‌های شبیه‌سازی به خصوص نمونه‌گیری گیبس در سال ۱۹۸۴ و نفوذ شبیه‌سازی با استفاده از مونت کارلوی زنجیره مارکوفی، راهی برای ساده‌سازی روابط و فرمول‌های پیچیده مدل‌های صف‌بندی گشوده شد که مهم‌ترین کارهای انجام‌شده در این دهه توسط ویپر و همکاران انجام گرفته است [۱۴].

۳- براورد پارامترهای مدل به شیوه‌ی بیزی

تابع چگالی ارایه‌شده در رابطه‌ی (۲)، شامل پارامترهایی است که باید براورد شوند. برای براورد این پارامترها به شیوه‌ی بیزی، ابتدا توزیع‌های پیشینی روی آن‌ها تعریف کرده، سپس با پیدا کردن توزیع پسین آن‌ها، این براوردها را به‌دست می‌آوریم. اما اغلب توزیع‌های پسین، شکل پیچیده‌ای دارند که با روش‌های مونت کارلوی زنجیره مارکوفی، آن‌ها را تقریب زده و پارامترها را براورد می‌کنیم.

حال فرض کنید یک نمونه‌ی تصادفی ساده به اندازه‌ی n از زمان‌های ورود (سرویس) از توزیع ارلنگ آمیخته‌ی تعمیم‌یافته در رابطه‌ی (۲) داریم. با فرض معلوم بودن L که تعداد متغیرهای تصادفی دارای توزیع نمایی است که ترکیب آن‌ها متغیر تصادفی زمان بین ورود را می‌سازند، توزیع‌های پیشین ناسره زیر را برای پارامترها در نظر می‌گیریم.

$$\upsilon_r \sim \text{Beta}(a,b) \tag{۳}$$

$$f(\lambda_1) \propto \frac{1}{\lambda_1} \tag{۴}$$

$$P \sim \text{Dirichlet}(1,\ldots,1) \tag{۵}$$

اوسین و همکاران نشان دادند برای داشتن یک توزیع پسین سره، باید a را بزرگ‌تر از ۱ انتخاب کنیم [۳]. برای براورد توزیع‌های آمیخته، معمولاً به‌ازای هر یک از مشاهده‌های $x_1,\ldots,x_n$ متغیرهای تصادفی Z_i را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$P(Z_i = r \mid L, \underline{P}) = p_r$$

$$P(Z_i = r \mid x_i, \underline{P}, \lambda_1, \upsilon) \propto P_r f_r(x_i \mid \lambda_1, \upsilon_2, \ldots, \upsilon_r) \tag{۶}$$

حال به‌کمک توزیع‌های پیشین معرفی‌شده در روابط (۳) تا (۶) و همچنین تابع درستنمایی زمان‌های بین ورود می‌توان توزیع پسین پارامترها را به‌صورت زیر نوشت:

$$P \mid x, z \sim \text{Dirichlet}(1+n_1,\ldots,1+n_L)$$

که در آن n_r، تعداد دفعاتی است که $z_i = r$، به‌ازای $r = 1,\ldots,L$ و

$$f(\lambda_1 \mid x, z, \upsilon) \propto \prod_{i=1}^{n} f_{z_i}(x_i \mid \lambda_1, \upsilon_2, \ldots, \upsilon_{z_i}) f(\lambda_1),$$

$$f(\upsilon_r \mid x, z, \lambda_1, \upsilon_{-r}) \propto \prod_{\substack{i=1 \\ z_i > r}}^{n} f_{z_i}(x_i \mid \lambda_1, \upsilon_2, \ldots, \upsilon_{z_i}) f(\upsilon_r).$$

از آنجایی که این توزیع‌های پسین شکل پیچیده‌ای دارند، باید با استفاده از الگوریتم‌های مونت کارلوی زنجیره مارکوفی تقریب زده شوند. بنا بر این، مراحل زیر را در محیط برنامه‌نویسی نرم‌افزار R 2.9.0 می‌نویسیم.

۱. داده‌های گمشده $\underset{\sim}{z}^{(i+1)}$ را از $\underset{\sim}{z}^{(i+1)} \sim \underset{\sim}{z} \mid x, \underset{\sim}{p}^{(i)}, \underset{\sim}{\lambda}^{(i)}, \underset{\sim}{\upsilon}^{(i)}$ برای تکرار $i = 1, \ldots, 2000$ تولید می‌کنیم،

۲. $\underset{\sim}{p}^{(i+1)}$ را از توزیع $\underset{\sim}{p}^{(i+1)} \sim \underset{\sim}{p} \mid x, \underset{\sim}{z}^{(i+1)}$ تولید می‌کنیم،

۳. $\lambda_1^{(i+1)}$ را از توزیع $\lambda_1 \mid x, \underset{\sim}{z}^{(i)}, \underset{\sim}{\upsilon}^{(i)}$ تولید می‌کنیم. برای تولید نمونه‌ی تصادفی از این پارامتر از الگوریتم متروپولیس-هستینگس با توزیع گاما، یعنی، $\hat{\lambda}_1 \sim G\left(2, \frac{2}{\lambda_1^{(i)}}\right)$ در بین گام‌های الگوریتم گیبس استفاده می‌کنیم،

۴. به‌همین ترتیب به‌ازای $r = 1, 2$ ، $\upsilon_r^{(i+1)} \sim \upsilon_r \mid x, \underset{\sim}{z}^{(i)}, \upsilon_1^{(i)}, \ldots, \upsilon_L^{(i)}$ با توزیع پیشنهادی بتای آمیخته به‌صورت زیر تولید می‌کنیم:

$$g(\tilde{\upsilon}_r \mid \upsilon_r^{(i+1)}) = \frac{1}{2} Be\left(\frac{1}{1-\upsilon_r^{(i+1)}}, 2\right) + \frac{1}{2} Be\left(2, \frac{1}{\upsilon_r^{(i+1)}}\right)$$

قرار می دهیم $i = i + 1$ و به مرحله‌ی ۲ برمی‌گردیم.

با استفاده از این الگوریتم، یک مجموعه‌ی داده با ۴ متغیر شامل λ_1 ، υ_2 ، و $\underset{\sim}{p} = (p_1, p_2)$ برای توزیع مدت زمان بین ورود و به‌طور مشابه ۴ متغیر دیگر شامل μ_1 ، γ_2 ، و $\underset{\sim}{Q} = (q_1, q_2)$ برای توزیع مدت زمان سرویس‌دهی داریم که از آن‌ها برای پیش‌بینی مدل صف‌بندی GI/G/۱ استفاده می‌کنیم.

۴- پیش‌بینی بیزی مدل صف‌بندی GI/G/۱

فرض کنید دو سری مشاهده به‌ترتیب برای زمان‌های ورود و سرویس به‌صورت $t=\{t_1,\dots,t_{n_a}\}$ و $s=\{s_1,\dots,s_{n_s}\}$ داشته باشیم. بنا بر این، با استفاده از روش مونت کارلوی زنجیره مارکوفی، می‌توان برخی از اندازه‌های صف را براورد کرد. یکی از این اندازه‌ها، شدت ترافیک، ρ ، است که برای این مدل صف‌بندی به‌صورت زیر به‌دست می‌آید [۹].

$$\rho=\frac{E(T)}{E(S)}=\frac{\sum_{r=1}^{M}\left(1-\sum_{s=1}^{r-1}Q_s\right)\frac{1}{\mu_r}}{\sum_{r=1}^{L}\left(1-\sum_{t=1}^{r-1}P_t\right)\frac{1}{\lambda_r}}$$

شدت ترافیک را می‌توان به‌صورت درصدی از زمان که سامانه مشغول به کار است نشان داد. بنا بر این، برای این که نشان دهیم، سامانه در حالت گذرا است، می‌توان احتمال زیر را به‌دست آورد که اگر $\rho>1$ باشد، سامانه در حالت گذراست [۹].

$$P(\rho>1\,|\,t,s)=\frac{1}{1000}\#\{\rho^{(j)}>1\}$$

که در آن، # تعداد دفعاتی را می‌شمارد که $\rho^{(j)}$ بزرگ‌تر از ۱ باشد.

برتزیماس و ناکازاتو در حالت گذرا، فرم بسته‌ای برای تبدیل لاپلاس‌های توزیع زمان انتظار، توزیع احتمال طول صف و توزیع دوره‌ی اشتغال، زمانی که پارامترهای سامانه $\{L,P,\lambda\}$ و $\{M,Q,\mu\}$ معلوم باشند، به‌دست آورده‌اند [۵]. براورد به‌روش بیزی این پارامترها به‌کمک این نتایج به‌دست می‌آیند که آن‌ها را در ادامه می‌آوریم.

تبدیل لاپلاس تابع توزیع تجمعی طول دوره‌ی اشتغال، به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$\int_0^\infty e^{-st}P(B\le t)dt=\frac{1}{s}-\frac{1-\sum_{r=1}^{M}Q_r\prod_{k=1}^{r}(\mu_r/\mu_r+s)}{s}\prod_{r=1}^{M}\frac{s+\mu_r}{s-y_r(s)}$$

که در آن $y_r(s)$ برای $r = ۱,...,M$ ، M ریشه‌ی معادله‌ی زیر هستند.

$$\left[\sum_{r=۱}^{L} P_r \prod_{k=۱}^{r}\left(\frac{\lambda_k}{\lambda_k + s - y_r(s)}\right)\right] \times \left[\sum_{r=۱}^{M} Q_r \prod_{k=۱}^{r}\left(\frac{\mu_k}{\mu_k + y_r(s)}\right)\right] = ۱$$

و به‌روش مشابه، براورد تبدیل لاپلاس تابع توزیع زمان انتظار به‌صورت زیر است:

$$۱ + \sum_{r=۱}^{M} (-۱)^{M} \frac{S_{۱,M}(۰)}{S_{۱,M}(y_r(s))} \left(\prod_{\substack{k=۱ \\ k \neq r}}^{M} \frac{y_r(s)}{y_r(s) - y_k(s)}\right) e^{y_r(s)w}$$

که در آن $S_{k,r}(x)$ ، توزیع احتمال این است که متقاضی در جریان ورود از مرحله‌ی k به مرحله‌ی r در طول زمان t برود، بدون اینکه هیچ سرویسی کامل شود. واضح است که اگر $k > r$ باشد، این توزیع احتمال برابر صفر است. تبدیل لاپلاس توزیع احتمال $S_{k,r}(x)$ به‌صورت زیر است:

$$S_{k,r}^{*}(s) = \frac{۱ - \sum_{s=۱}^{r-۱} Q_s}{۱ - \sum_{s=۱}^{k-۱} Q_s} \cdot \frac{\prod_{i=k}^{r-۱} \mu_i}{\prod_{i=k}^{r} (\mu_i + s)} \qquad r = k,....,M$$

تا اینجا تبدیل لاپلاس تابع توزیع اندازه‌های مؤثر بودن را معرفی کردیم. با استفاده از تعریف امید ریاضی یک متغیر تصادفی و همچنین تعریف تبدیل لاپلاس می‌توان به سادگی نتیجه گرفت که اگر $f(t)$ تابع چگالی یک متغیر تصادفی مانند T باشد، آن‌گاه

$$E(T) = -\frac{df^{*}(s)}{ds}\Big|_{s=۰}$$

حال برای براورد امید ریاضی اندازه‌های مؤثر بودن، ابتدا عبارت $-\frac{df^{*}(s)}{ds}$ را محاسبه کرده و سپس با استفاده از i نمونه‌ی شبیه‌سازی‌شده برای پارامترهای مدل آن‌را به‌صورت زیر براورد می‌کنیم:

$$E(T) = \frac{۱}{i}\sum_{i=۱}^{I} E(T_i) \qquad i = ۱,\ldots,\mathrm{I}$$

که در آن $E(T_i)$ امید ریاضی حاصل از i امین نمونه‌ی شبیه‌سازی شده است.

۵- مثال کاربردی

ازچند سال گذشته تا کنون، بانک‌ها از نظریه‌ی صف برای ساماندهی صف‌های تشکیل‌شده پشت باجه‌های دریافت و پرداخت، استفاده‌های زیادی برده‌اند. شعب بانک‌ها، با دستور واحد انفورماتیک مرکزی خود اقدام به تهیه‌ی دستگاه‌های نوبت‌دهی می‌کنند. این دستگاه‌ها شامل دو نوع سخت‌افزاری و نرم‌افزاری می‌باشند که در بانک‌های کشور ما، اغلب از نوع دوم دستگاه‌های نوبت‌دهی یعنی سامانه‌ی نرم‌افزاری استفاده می‌شود. این سامانه از چندین بخش تشکیل شده است که عبارت‌اند از: موتور کنترل‌کننده، کیوسک شماره‌دهنده، نرم‌افزار فراخوان، نمایشگر مرکزی و بلندگوهای گوینده‌ی شماره.

برای گرداوری داده‌ها، به یکی از شعب بانک ... که از دستگاه نوبت‌دهی استفاده می‌کند، مراجعه کردیم. این شعبه، ۴ باجه‌ی سرویس‌دهی دارد و در هر یک از باجه‌ها سرویس‌های مختلفی ارایه می‌شود. متقاضیان با توجه به نوع سرویس درخواستی خود، یکی از صف‌ها را انتخاب می‌کنند. یکی از این باجه‌ها، مسئول پرداخت وجه نقد از حساب‌های بانکی و همچنین واریز وجه نقد به حساب‌های دیگر است. برای گرداوری داده‌ها به مدت یک هفته در آذر ماه ۱۳۸۸، به بانک مورد نظر مراجعه کرده و مدت زمان بین ورود و سرویس‌دهی متقاضیان را بین ساعت ۷:۳۰ الی ۹ ثبت کردیم. در مدت یک هفته ۲۳ مراجعه به‌منظور برداشت وجه نقد از حساب بانکی و ۶۸ مراجعه به‌منظور واریز وجه نقد به سایر حساب‌های بانکی در ساعت ۷:۳۰ الی ۹ ثبت شده است. با توجه به اینکه ثبت داده‌ها، به‌صورت دستی انجام شده است، می‌تواند دارای خطا باشد.

نحوه‌ی کار دستگاه نوبت‌دهی در شعبه‌ی مورد نظر، به این صورت است که در هنگام نصب آن، یک مدت زمان تقریبی برای ارایه‌ی سرویس که در حقیقت همان نرخ سرویس‌دهی است به‌عنوان مثال ۵ دقیقه مشخص می‌کند. وقتی دستگاه شروع به کار می‌کند، تعداد افرادی که اقدام به دریافت شماره‌ی نوبت‌دهی می‌کنند، در حافظه‌ی دستگاه

ثبت می‌شود. وقتی متقاضی وارد بانک می‌شود، در برگه‌ی نوبت‌دهی که از دستگاه دریافت می‌کند، اطلاعات زیر نوشته شده است:

نام صف: کلیه‌ی امور بانکی

تعداد افراد صف: ۷ نفر

حدود زمان انتظار: ۳۰ دقیقه

وقتی سرویس‌دهی به یک متقاضی پایان می‌یابد، سرویس‌دهنده با استفاده از کامپیوتر خود، به دستگاه نوبت‌دهی اعلام می‌کند که نفر بعد فراخوانی شود.

برای تحلیل سامانه‌ی صف‌بندی ابتدا شدت ترافیک را به‌دست می‌آوریم،

$$\rho = \frac{۱}{۱۰۰۰}\sum_{i=۱}^{۱۰۰۰}\rho^{(i)} = ۱/۲۳۴۰۶$$

در اینجا لازم است احتمال این‌که سامانه در حالت گذرا باشد را نیز به‌دست آوریم،

$$P(\rho > ۱ \mid t,s) = \frac{۱}{۱۰۰۰}\#\{\rho^{(j)} > ۱\} = ۰/۶۸۴۰۶$$

که در آن، # تعداد دفعاتی را می‌شمارد که $\rho^{(j)}$ بزرگ‌تر از ۱ باشد. با این مقدار احتمال، لزوم بررسی سامانه در حالت گذرا ضروری به نظر می‌رسد. همچنین متوسط تعداد افراد در صف و متوسط زمان انتظار در صف به ترتیب برابر است با

$$L_q = ۱۳/۰۹۴۳, \qquad W_q = ۱۱/۷۱.$$

حال باید نتایج حاصل از مدل صف‌بندی GI/G/۱ و نحوه‌ی عملکرد دستگاه نوبت‌دهی در بانک مورد نظر را مقایسه و تحلیل کنیم.

نتیجه‌ی ۱- با توجه به نحوه‌ی عملکرد دستگاه نوبت‌دهی، برای مدت زمان بین ورود متقاضیان به بانک تابع توزیعی در نظر گرفته نمی‌شود و یا تابع توزیع مدت زمان سرویس را نمایی با میانگین ۵ دقیقه فرض می‌کنند که درستی فرض نمایی بودن مدت زمان سرویس متقاضیان با p-مقدار ۰/۰۰۳ رد می‌شود.

نتیجه‌ی ۲- هر چند دستگاه‌های نوبت‌دهی به توزیع زمان ورود متقاضیان کاری ندارند، اما برای اینکه نشان دهیم اندازه‌های مؤثر بودن با تغییر توزیع زمان‌های بین ورود و

جدول ۱- مقایسه‌ی نتایج مدل‌های صف‌بندی مختلف با استفاده از داده‌های دستگاه نوبت‌دهی

مدل صف‌بندی / اندازه‌ی مؤثر بودن	GI/G/۱	G/M/۱	M/G/۱	H/M/۱	M/E(۲)/۱	E(۲)/M/۱	M/M/۱	M/D/۱
L_q	۱۳/۰۹	۹/۰۳۷	۱۶/۵۵	۸/۴۴	۶/۰۷	۰/۰۷	۲/۲۵	۱/۹۷
W_q	۱۱/۷۱	۷/۱۶	۱۳/۴۹	۸/۶۸	۱/۲۱	۴/۴۱	۲/۴۵	۳/۳۹

سرویس‌دهی به متقاضیان چقدر تغییر می‌کند، نتایج حاصل از مدل‌های M/D/۱، M/M/۱، H/M/۱، E(۲)/M/۱، M/E(۲)/۱، M/G/۱، G/M/۱ و GI/G/۱ را در جدول ۱ آورده‌ایم[۲].

همان‌طور که می‌بینید، با تغییر مدل صف‌بندی اعداد حاصل بسیار تغییر می‌کنند. اما، نتایج مدل صف‌بندی GI/G/۱ که موضوع اصلی مقاله است، به نتایج مدل‌های صف‌بندی H/M/۱ و M/G/۱ نزدیک‌تر می‌باشد.

نتیجه‌ی ۳- زمان انتظار مشتریان در زمان آغازین شروع کار بانک‌ها زیادتر از بقیه‌ی زمان‌ها در طول ساعت کاری است. به این دلیل که اغلب متقاضیان تمایل دارند قبل از رفتن به سر کار، عملیات بانکی خود را انجام دهند و از طرفی سرویس‌دهنده‌ها در صبح درگیر فعالیت‌هایی نظیر آماده کردن وجه نقد، وصل شدن به شبکه‌های بانکی و ... هستند. بنا بر این همان‌طور که از نتایج تحلیل سامانه به‌دست آمده است، در ساعات شروع کار بانک تا ساعت ۹ صبح، سامانه‌ی صف‌بندی بانک در حالت گذرا است. جدول ۲ اعداد حاصل از تقریب مدل صف‌بندی GI/G/۱ را در دو حالت گذرا و پایا نشان می‌دهد.

نتیجه‌ی ۴- دستگاه‌های نوبت‌دهی با وجود امکانات زیادی که دارند، تنها برای جلوگیری از ازدحام متقاضیان در جلوی باجه‌ها به کار گرفته می‌شوند و در بهینه‌سازی سرویس‌دهی سامانه نه تنها نقشی ایفا نمی‌کنند بلکه از داده‌هایی که در طول روز تولید می‌شود نیز برای ارزیابی این سامانه، بهره‌ای گرفته نمی‌شود. به‌عنوان مثال، با توجه به نتایج به‌دست آمده،

جدول ۲- مقایسه‌ی نتایج مدل صف‌بندی GI/G/۱ در حالت گذرا و پایا

	W_q	L_q
GI/G/۱- در حالت پایا	۸/۱	۹
GI/G/۱- در حالت گذرا	۱۱/۷۱	۱۳/۰۹

در بانک مذکور ۱۶ صندلی در مکان انتظار تعبیه شده است که در زمان ابتدای شروع کار، با فرض اینکه حتی اگر باجه‌های دیگر این شعبه تعداد کمی متقاضی داشته باشند، همچنان تعدادی از متقاضیان جایی برای نشستن ندارند.

توضیحات

1. Mixed General Erlang

۲. در مدل‌های صف‌بندی مذکور، D نماد الگوی ورود یا سرویس قطعی، M نماد توزیع نمایی، H نماد توزیع ابرنمایی، و E نماد توزیع ارلنگ است. همچنین روش محاسبه‌ی متوسط تعداد افراد در صف (L_q) و متوسط زمان انتظار در صف (W_q) به‌طور کامل در [۹] ذکر شده است. لازم به ذکر است محاسبه‌ی اندازه‌های مذکور با استفاده از نرم‌افزار MCQueue انجام شده است.

مرجع‌ها

[1] Armero, C. (1985). Bayesian analysis of M/M/1/1/FIFO queues, *Bayesian Statistics*, 2, 613-618.

[2] Ausin, M.C. and Wiper, M.P. (2004). Bayesian estimation for the M/G/1 queue using a phase type approximation, *Statistical Planning and Inference,* **118**, 83-101.

[3] Ausin, M.C., Wiper, M.P. and Lillo, R.E., (2007). Bayesian prediction of the transient behaviour and busy period in short- and long-tailed GI/G/1, *Queueing Systems*.

[4] Bagchi, T.P. and Cunnincham, A.A. (1972). Bayesian approach to the design of queuing systems, *INFOR*, **10**, 36–46.

[5] Bertsimas, D.J. and Nakazato, (1992). Transient and busy period analysis of the GI/G/1 queue: The method of stages, *Queueing Systems,* **10**, 153–184.

[6] Cumani, A. (1982). On the canonical representation of homogenous Markov processes modelling failure-time distributions, Microelectron. *Reliability* **23**, 583–602.

[7] DeVore, R. and Lorentz, G. (1993). *Constructive Approximation*. Springer-Verlag, New York.

[8] Diebolt, J. and Robert, C.P. (1994). Estimation of finite mixture distributions through Bayesian sampling, *J. Roy. Statist. Soc. Ser, B* **56**, 363–375.

[9] Gross, D. and Harris, C.M. (1998). *Fundamentals of Queueing Theory,* John Wiley & Sons, New York.

[10] McGrath, M.F. and N.D. Singpurwalla. (1987). A subjective Bayesian approach to the theory of queues II - inference and information in M/M/1 queues, *Queueing Systems*, 1, 335-353.

[11] McGrath, M.F., D. Gross and N.D. Singpurwalla. (1987). A subjective Bayesian approach to the theory of queues I – Modeling, *Queueing Systems*, 1, 317-333.

[12] Muddapur, M.V. (1972). Bayesian estimates of parameters in some queueing models, Annals of the Institute of Mathematics, 24, 327-331.

[13] Reynolds, J.F. (1973). On estimating the parameters of a birth-death process, Australian Journal of Statistics, 15, 35-43.

[14] Wiper, M.P., Rios, D. and Ruggeri, F. (2001). Mixtures of gamma distributions with applications, *J. Comput. Graphical Statist* ,**10**, 440–454.

محمدرضا صالحی راد
دکتری آمار
تهران، خیابان شهید بهشتی، نبش احمد قصیر، دانشکده‌ی اقتصاد دانشگاه علامه طباطبایی، گروه آمار.
رایانشانی: salehirad@eco.ac.ir

آسیه عباسی
کارشناس ارشد آمار
تهران، خیابان فاطمی، نبش خیابان رهی معیری، مرکز آمار ایران.
رایانشانی: asieh_abasi@yahoo.com